

Math. P.
147^m
40

Math. P. 147 ^m in 4^c

Hanson

ENTWICKELUNG

DES

NEGATIVEN UND ENGRADEN POTENZEN

DES

QUADRATWURZEL DER FUNCTION

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{2048}x^{10} - \frac{63}{131072}x^{12} + \dots$

VON

P. A. HANSEN

ENTWICKELUNG

DER NEGATIVEN UND UNGRADEN POTENZEN

DER QUADRATWURZEL DER FUNCTION

$$r^2 + r'^2 - 2rr' (\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J).$$

VON
P. A. HANSEN.

$q^2 = A_1$

1^2

ENTWICKELUNG

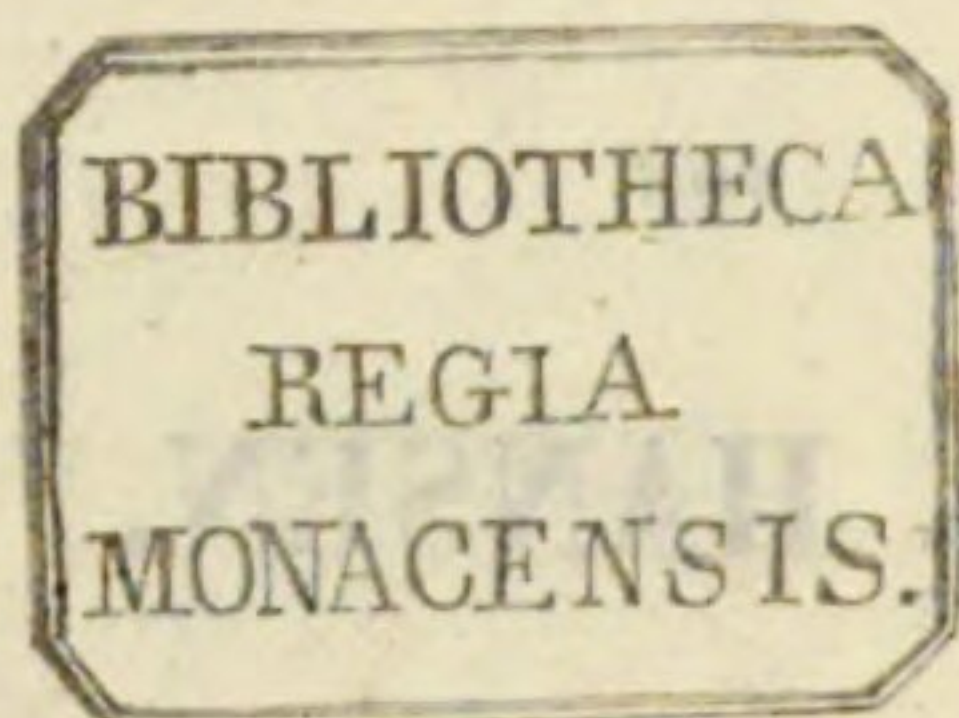
DER

NEGATIVEN UND UNGRADEN POTENZEN

VON

QUADRATWURZEL DER FUNCTION

$x^2 + y^2 = r^2$ — für $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (s. 1. Aufl. 1874)



ENTWICKELUNG DER NEGATIVEN UND UNGRADEN POTENZEN DER QUADRATWURZEL DER FUNCTION

$$r^2 + r'^2 - 2rr' (\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J).$$

Die Entwicklung der Potenzen der in der Ueberschrift genannten Function ist an sich von besonderem, mathematischen Interesse, weil sie zu den schwierigsten Aufgaben gehört, und auf merkwürdige Formen hinführt. Die negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel derselben haben ausserdem ein hohes Interesse, weil sie in der Mechanik des Himmels allenthalben erscheinen, sowohl in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper um einander, wie in der um ihre Axen, und nicht minder in der Theorie der Figur derselben. Die Entwicklung der Potenz $-\frac{1}{2}$ dieser Function, welche vorzugsweise in den genannten Theorien erscheint, ist namentlich in zwei verschiedenen Formen behandelt worden. Für die Anwendung auf die Theorie der Bewegung der Himmelskörper um einander, für welche U und U' die Argumente der Breite irgend zweier Körper bedeuten, während r und r' die Radii Vectoren, und J die gegenseitige Neigung der Bahnen ist, hat man sie sonst immer in eine Reihe entwickelt, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreitet. Ich habe sie für diesen Zweck in den «Absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung» für den einen Körper nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie, und in meiner Pariser Preisschrift nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen anderer Bögen oder Winkel, die ich partielle Anomalien nenne, entwickelt. Die zweite Form, die man der Entwicklung der in Rede stehenden Function gegeben hat, ist die nach den Potenzen von r und r' geordnete, welche vorzugsweise in der Theorie der Rotation und der Figur der Himmelskörper zur Anwendung kommt. In den «Absoluten Störungen etc.» habe ich, um die beabsichtigte Form zu erhalten, erst die Entwicklung nach den Potenzen von r und r' vorgenom-

men, und bin dadurch dahin gelangt, die Berechnung der Entwicklungscoefficienten überhaupt in sehr kurzer Zeit ausführen zu können.

Spätere Untersuchungen haben mich überzeugt, dass in vielen Fällen diese Art der Entwicklung dieser Function auf weit kürzere Arbeit bei der Berechnung der numerischen Coefficienten hinführt, wie alle anderen bisher bekannten Verfahrensarten. Wenn r und r' so beschaffen sind, dass ihr Verhältniss der Eins nahe kommen kann, dann wird dieses Verfahren freilich nicht mehr kurz, aber es ist schon nicht mehr unbequem, wenn $r:r'$ zwischen 0,5 und 0,6 liegt, und kann selbst immer noch mit Nutzen bei Werthen dieses Verhältnisses angewandt werden, die etwas grösser sind. Ist hingegen der grösste Werth desselben kleiner wie 0,5, so wird es schon beträchtlich kürzer, und überhaupt um desto kürzer, je kleiner der grösste Werth dieses Verhältnisses ist. Diese Entwicklungsart wird sich daher mit Nutzen bei der Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, die jetzt in so grosser Menge auftauchen, anwenden lassen; eine Berechnung, die dringend nothwendig wird, um nicht den einen oder andern derselben wieder verloren gehen zu lassen.

Namentlich für diese Planeten bietet die genannte Entwicklungsart wesentliche Rechenvortheile dar, die in dem Umstande ihren Grund haben, dass die störenden Planeten immer dieselben sind. Es kann nemlich ein nicht unbeträchtlicher Theil der Rechnung ein für alle Mal ausgeführt werden, weil die numerischen Werthe der bezüglichen Coefficienten von den Elementen der Planetenbahnen unabhängig sind. Ein anderer, auch nicht unbedeutender, Theil kann deshalb ein für alle Mal ausgeführt werden, weil es blos von den Excentricitäten der Bahnen der störenden Planeten abhängt, so dass schliesslich bei der Anwendung auf einen speciellen Fall nur die dritte Abtheilung der Rechnung auszuführen ist, welche von den Elementen der Bahn des gestörten Planeten abhängt. Die ins Einzelne gehende Auseinandersetzung dieses Verfahrens und die Anwendung desselben auf ein Beispiel muss ich indess einer anderen Abhandlung vorbehalten, wovon ich schon einen Theil ausgearbeitet habe.

Die Entwicklung der in Rede stehenden Function nach den Potenzen von r und r' ist schon längst auf eine elegante Form gebracht worden, allein diese kann hier nicht angewendet werden, da in derselben die Glieder grade die entgegengesetzte Form haben, deren man

zum oben genannten Zwecke bedarf. Sie sind nemlich nach den Potenzen der Sinusse und Cosinusse von U und U' , und nach den Cosinussen der Vielfachen von J geordnet, während wir sie nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von U und U' , und nach den Potenzen des Sinus oder Cosinus von J haben müssen, weil U und U' die Argumente der Breiten, und J die gegenseitige Neigung der Bahnen des störenden und gestörten Planeten bedeuten.

Eine Entwicklung dieser Art ist noch nirgends gegeben worden; die welche ich hier gebe, hat daher auch, abgesehen von ihrer astronomischen Anwendung, das rein mathematische Interesse, dass sie die Coefficienten von r und r' in einer neuen, bisher unbekannten Form darstellt. Der allgemeine Ausdruck, den ich für diese Coefficienten erhalten habe, ist sehr einfach, er besteht für die positiven und negativen Coefficienten abgesondert aus einem einzigen Gliede, und ist eine Function von Factoriellen, oder mit andern Worten Function der Gaussischen H Functionen mit Argumenten, die ganze und positive Zahlen sind. Aus diesem Ausdruck setzen sich die Coefficienten der Cosinusse der Vielfachen von U und U' dergestalt zusammen, dass sie ganze und rationale Functionen von $\text{tg}^2 \frac{1}{2} J$ sind. Die numerischen Werthe der Coefficienten derselben sind bis zur 21. Potenz von r berechnet und dieser Abhandlung angehängt. Die Berechnung selbst habe ich ausgeführt, und Hr. Dr. Scheibner hat die Controllen derselben nach Anleitung des Art. 26 berechnet.

Da die ganze Entwicklung strenge ausgeführt ist, so gilt sie für jeden Werth von J , aber da die Coefficienten der höheren Potenzen von $\text{tg}^2 \frac{1}{2} J$ bedeutend gross werden, während die ganze und rationale Function, welcher sie angehören, nur bedeutend kleinere Werthe annehmen kann, so wird ihre Anwendung in dieser Form beschwerlich, wenn J eine gewisse Grösse übersteigt. Da man sie jedoch noch ohne Unbequemlichkeit für die grösste jetzt bekannte, in unserm Planetensystem vorkommende, Neigung — die der Pallasbahn von ohngefähr 35° — anwenden kann, so hätte ich mich mit derselben begnügen können, aber um auch Formeln für den nicht undenkbaren Fall zu geben, dass Planeten mit grösseren Neigungen bekannt werden sollten, habe ich mehrere Umformungen damit vorgenommen. Es zeigt sich leicht, dass diese ganze und rationale Function, abgesehen von einem allgemeinen Factor, welcher hervortritt, in die Classe der Gaussischen hypergeometrischen

Reihen gehört, und dass folglich die Umformungen, deren diese Reihen fähig sind, hierauf angewandt werden können.

Bei den Formen, die ich hier beabsichtigte dieser Reihe zu geben, trat das Bedürfniss hervor sie in Fällen, wofür man bis jetzt keine Summenformeln hatte (namentlich im Falle wo das vierte Element $= -1$ wird) summiren zu müssen, und dieser Umstand veranlasste eigene Untersuchungen über die Summation dieser hypergeometrischen Reihe, und gab Veranlassung zum Inhalt des ersten Paragraphen dieser Abhandlung. Man darf hierin daher nicht eine vollständige Abhandlung über die Summation dieser Reihen erwarten, sondern nur die Summation derselben in den Fällen, die im zweiten Paragraphen zur Anwendung kommen. Ausser diesem wird man jedoch darin mehrere neue Summationsformeln, die sich mir in dieser Untersuchung gelegentlich darbieten, so wie einen neuen allgemeinen Ausdruck finden, der eine weit allgemeinere Benutzung zuzulassen scheint, wie die, die ich hier daraus gezogen habe.

Während im grössten Verlaufe des zweiten Paragraphen die Entwicklung der Potenz $- \frac{1}{2}$ der Eingangs genannten Function ausgeführt wird, zeige ich am Schlusse, nachdem ich die Formeln zum Uebergang zu den Coefficienten der Cosinusse und Sinusse der Vielfachen der wahren Anomalien entwickelt habe, wie man davon zu der Entwicklung der Potenzen $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, etc. der genannten Function übergehen kann. Der dritte §. endlich behandelt kurz ein paar Formen, die ich nicht glaubte mit Stillschweigen übergehen zu dürfen.

§ I.

Von der Summation der Gaussischen hypergeometrischen Reihe.

1.

Euler hat (*Inst. calc. integr.* Vol. II. probl. 134) durch ein sehr elegantes, in späteren Schriften oft nachgeahmtes, Verfahren eine hypergeometrische Reihe summirt, die der Gaussischen (*Disquisitiones ca. ser. infinit.*) analog ist, und auf diese hingeführt werden kann. Eulers Resultat umfasst aber nicht alle Fälle, auf welche es bezogen werden kann, sondern ist einer Erweiterung fähig, von welcher ich hier das Wesentlichste entwickeln werde. Sei die Reihe

$$\psi(x) = 1 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + a_3 b_3 x^3 + \dots$$

zu summiren, in welcher $a_1, a_2, \text{etc.}$ irgend welche numerische Coefficienten, und

$$b_1 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad b_2 = \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1}, \quad b_3 = \frac{\beta \cdot \beta + 1 \cdot \beta + 2}{\gamma \cdot \gamma + 1 \cdot \gamma + 2}, \quad \text{etc.}$$

sind. Sei ferner

$$\varphi(xu) = 1 + a_1 xu + a_2 x^2 u^2 + a_3 x^3 u^3 + \dots$$

Wenn nun P irgend eine Function von u , und a und b ohne Indices zwei beliebige Grössen bezeichnen, dann ist identisch

$$\int_a^b P \varphi(xu) du = \int_a^b P du (1 + a_1 xu + a_2 x^2 u^2 + a_3 x^3 u^3 + \dots)$$

Stellt man hierauf die folgenden Gleichungen auf

$$\int_a^b Pu du = b_1 \int_a^b P du$$

$$\int_a^b Pu^2 du = b_2 \int_a^b P du$$

$$\int_a^b Pu^3 du = b_3 \int_a^b P du$$

etc.

und substituirt sie in die vorstehende identische Gleichung, so wird

$$\int_a^b P \varphi(xu) du = (1 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + a_3 b_3 x^3 + \dots) \int_a^b P du$$

woraus sogleich

$$(1) \quad \psi(x) = \frac{\int_a^b P \varphi(xu) du}{\int_a^b P du}$$

folgt, in welcher Gleichung noch die Function P und die Grenzen a und b der Integrale zu bestimmen sind.

2.

Die oben aufgestellten Gleichungen geben

$$\int_a^b Pu du = b_1 \int_a^b P du$$

$$b_1 \int_a^b Pu^2 du = b_2 \int_a^b Pu du$$

$$b_2 \int_a^b Pu^3 du = b_3 \int_a^b Pu^2 du$$

etc.

also überhaupt

$$b_{i-1} \int_a^b Pu^i du = b_i \int_a^b Pu^{i-1} du$$

Die obigen Ausdrücke für b_1, b_2 , etc. geben aber allgemein

$$b_i = \frac{\beta \cdot \beta + 1 \dots \beta + i - 1}{\gamma \cdot \gamma + 1 \dots \gamma + i - 1}$$

es wird daher

$$(2) \quad (\gamma + i - 1) \int_a^b P u^i du = (\beta + i - 1) \int_a^b P u^{i-1} du$$

wo im Allgemeinen die ganze und positive Zahl i von 1 bis ∞ ausgedehnt werden muss. Sei durch die unbestimmte Integration

$$(\gamma + i - 1) \int P u^i du = (\beta + i - 1) \int P u^{i-1} du + Q u^i$$

erlangt, wo Q auch eine Function von u ist. Bestimmt man nun nach der Ermittlung der Ausdrücke für P und Q durch diese Gleichung, die Grenzen a und b der Integrale durch die Bedingung, dass

$$Q u^i = 0$$

an jeder derselben, und dass innerhalb derselben $Q u^i$ nicht unendlich werde, so ist es klar, dass die Gleichung (2) erfüllt ist. Differentiirt man zu dem Ende die vorstehende Gleichung, so kommt

$$(\gamma + i - 1) P u^i du = (\beta + i - 1) P u^{i-1} du + i Q u^{i-1} du + u^i dQ$$

und diese zerfällt, weil sie für jeden Werth von i gelten muss, in folgende zwei

$$P u = P + Q$$

$$(\gamma - 1) P u du = (\beta - 1) P du + u dQ$$

woraus

$$P = \frac{Q}{u - 1}$$

$$\frac{dQ}{Q} = (\gamma - 1) \frac{du}{u - 1} - (\beta - 1) \frac{du}{u(u - 1)}$$

hervorgeht. Durch die Integration dieser wird, wenn k die willkürliche Constante bezeichnet,

$$(3) \quad Q u^i = k u^{\beta + i - 1} (1 - u)^{\gamma - \beta}$$

und da die Eins der kleinste Werth von i ist, so sieht man sogleich, dass wenn

$$\beta > 0 \text{ und } \gamma > \beta$$

sind, die Werthe $u = 0$ und $u = 1$ die Gleichung $Q u^i = 0$ erfüllen, ohne dass zwischen diesen Grenzen $Q u^i$ unendlich wird. Wenn daher diese beiden Ungleichheiten statt finden, so wird der Ausdruck (1)

$$(3^*) \quad \psi(x) = \frac{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} \varphi(xu) du}{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} du}$$

Zu bemerken ist hiebei sowohl, wie bei den andern unten folgenden Summenformeln, dass die Bedingungen, unter welchen $Qu^i = 0$ wird, die Gleichung (2) im grössten Umfange erfüllen, und dass es daher Fälle geben kann, in welchen aus der (2) eine der folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$0 = 0 \text{ oder } \infty = \infty$$

Die Fälle, in welchen diese Identitäten statt finden, müssen ausgeschlossen werden.

3.

Die Gaussische Reihe ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \cdot \beta + 1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \dots$$

es ist also in Bezug auf diese

$$a_1 = \frac{\alpha}{1}, a_2 = \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2}, a_3 = \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc.}$$

und es wird daher

$$\begin{aligned} \varphi(xu) &= 1 + \frac{\alpha}{1} xu + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2} x^2 u^2 + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 u^3 + \dots \\ &= (1 - xu)^{-\alpha} \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Werth von $\varphi(xu)$ in (3*), so ergibt sich

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du}{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} du} \quad (4)$$

welches die Eulersche Summenformel ist, wenn man in seiner Reihe die Substitutionen macht, die nothwendig sind, um sie in die Gaussische umzuwandeln. Da in der letztgenannten die beiden ersten Elemente α und β mit einander verwechselt werden dürfen, so folgt aus der vorstehenden Summenformel sogleich die folgende

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-xu)^{-\beta} du}{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du} \quad (5)$$

welche das Erfülltsein der Ungleichheiten

$$\alpha > 0 \text{ und } \gamma > \alpha$$

verlangt.

4.

Ausser den obigen Bedingungen, unter welchen $Qu^i = 0$ wird, giebt es noch andere, die bei Euler nicht vorkommen, und die ich auch sonst nirgends aufgestellt gefunden habe. Schreiben wir die Gleichung (3) wie folgt,

$$Qu^i = k \frac{u^{\beta+i-1}}{(1-u)^{\beta-\gamma}}$$

und setzen wir

$$\beta > 0 \text{ und } \beta - \gamma > \beta + i - 1$$

dann wird $Qu^i = 0$ für $u = 0$ und $u = -\infty$, ohne für irgend einen Zwischenwerth unendlich zu werden.

Die zweite dieser Bedingungen kann erfüllt werden, wenn α eine ganze und negative Zahl, und γ überhaupt eine negative Grösse ist, denn vermöge dieser Beschaffenheit von α ist stets

$$i \leq -\alpha$$

Es wird demzufolge, wenn man $-\alpha$ statt α , und $-\gamma$ statt γ schreibt,

$$F(-\alpha, \beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^{-\infty} u^{\beta-1} (1-u)^{-(\gamma+\beta+1)} (1-xu)^\alpha du}{\int_0^{-\infty} u^{\beta-1} (1-u)^{-(\gamma+\beta+1)} du}$$

in welcher man durch die Substitution

$$\frac{u}{1-u} = -y$$

die Grenzen der Integrale auf 0 und 1 zurückführen kann. Da vermöge dieser Substitution die Werthe

$$u = -\infty \text{ und } y = 1$$

$$u = 0 \text{ und } y = 0$$

correspondiren, und

$$u = -\frac{y}{1-y}, \quad 1-u = \frac{1}{1-y}, \quad du = -\frac{dy}{(1-y)^2}$$

wird, so ergibt sich

$$(6) \quad F(-\alpha, \beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\alpha} (1+(x-1)u)^\alpha du}{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^\gamma du}$$

wenn

$$\beta > 0, \quad \gamma > \alpha - 1$$

und α eine ganze und positive Zahl ist. Dieses ist eine neue Summenformel, die für eine Reihe anderer Fälle wie die obige gilt. Durch Vertauschung von α und β mit einander findet man hieraus

$$F(\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\beta} (1+(x-1)u)^\beta du}{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^\gamma du}$$

welche voraussetzt, dass

$$\alpha > 0, \gamma > \beta - 1$$

und dass β eine ganze und positive Zahl sei.

5.

Seien ferner β und γ negative Grössen, dann wird die (3), wenn man $-\beta$ statt β , und $-\gamma$ statt γ schreibt,

$$Qu^i = k \frac{(1-u)^{\beta-\gamma}}{u^{\beta-i+1}}$$

und dieser Ausdruck wird Null für $u=1$ und $u=\infty$, ohne für irgend einen Zwischenwerth unendlich zu werden, wenn

$$\beta > \gamma > i - 1$$

ist. Die zweite Ungleichheit kann wieder erfüllt werden, wenn α eine ganze und negative Zahl ist. Es wird daher alsdann

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_1^\infty u^{-(\beta+1)} (1-u)^{\beta-\gamma-1} (1-xu)^\alpha du}{\int_1^\infty u^{-(\beta+1)} (1-u)^{\beta-\gamma-1} du}$$

Man führt hier die Grenzen der Integrale auf 0 und 1 zurück, wenn man

$$u = \frac{1}{y}$$

setzt, und erhält dadurch

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\gamma-\alpha} (1-u)^{\beta-\gamma-1} (u-x)^\alpha du}{\int_0^1 u^\gamma (1-u)^{\beta-\gamma-1} du} \quad (7)$$

wenn

$$\beta > \gamma > \alpha - 1$$

und α eine ganze und positive Zahl ist. Durch Vertauschung von α und β mit einander ergibt sich

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\gamma-\beta} (1-u)^{\alpha-\gamma-1} (u-x)^\beta du}{\int_0^1 u^\gamma (1-u)^{\alpha-\gamma-1} du}$$

wenn

$$\alpha > \gamma > \beta - 1$$

und β eine ganze und positive Zahl ist.

6.

Die in den Nennern dieser Summationsformeln vorkommenden Integrale lassen sich durch die Gaussischen Π Functionen erhalten, da unabhängig von der Theorie der F Functionen bewiesen werden kann, dass allgemein

$$(8) \quad \int_0^1 u^{\lambda-1} (1-u)^{\mu-1} du = \frac{\Pi(\lambda-1) \cdot \Pi(\mu-1)}{\Pi(\lambda+\mu-1)}$$

ist, wenn λ und μ positive Grössen sind. Da in dem speciellen Falle $x=1$ die Zähler dieser Summationsformeln dieselbe Form annehmen, so kann man in demselben auch diese, und folglich auch die F Functionen selbst durch die Π Functionen ausdrücken. Aus (4) und (5) erhält man ohne Unterschied

$$(A) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1) \Pi(\gamma-\beta-1)}$$

welches die bekannte Gaussische Summationsformel ist. Wegen des im Zähler von (4) und (5) enthaltenen Integrals, welches, nachdem $x=1$ gesetzt worden ist, den Factor $(1-u)^{\gamma-\beta-\alpha-1}$ enthält, muss hier zufolge der einen Bedingung, die die Gleichung (8) verlangt,

$$\gamma - \alpha - \beta > 0$$

sein, und es scheint, als müsse auch entweder α oder β positiv sein, dieses ist aber nicht nothwendig, denn der Factor, welcher den Ausdruck (A) unbestimmt machen könnte, wenn weder α noch β positiv ist, ist in dem Quotienten der Integrale verschwunden. Ausser dieser Summenformel geben die Ausdrücke (6) und (7) für den Fall $x=1$ die folgenden:

$$(B) \quad F(-\alpha, \beta, -\gamma, 1) = \frac{\Pi(\beta+\gamma) \Pi(\gamma-\alpha)}{\Pi(\gamma) \Pi(\gamma+\beta-\alpha)}$$

$$(C) \quad F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = (-1)^\alpha \frac{\Pi(\gamma-\alpha) \Pi(\beta+\alpha-\gamma-1)}{\Pi(\gamma) \Pi(\beta-\gamma-1)}$$

und die zu (6) und (7) correspondirenden Summationsformeln geben zwei ähnliche, die man auch aus den Vorstehenden durch Vertauschung von α und β mit einander erhält. Die Vorstehenden gelten für eine Reihe von andern Fällen wie (A), worunter ich hier nur den, wo in $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$

$$\gamma - \beta - \alpha = 0$$

ist, hervorheben will, welcher durch (B) summirt werden kann, während er von (A) ausgeschlossen werden muss. Die Summationsformeln (B) und (C) setzen jedenfalls voraus, dass das in der F Function mit α be-

zeichnete Element eine ganze und positive Zahl sei, in Bezug auf die übrigen Bedingungen sind sie aber einer weiteren Ausdehnung fähig wie die der allgemeineren (6) und (7), aus welchen sie hier abgeleitet worden sind. Man wird dieses aus den folgenden einfachen Betrachtungen erkennen, aus welchen sie auch hervorgehen. Dieselben Betrachtungen führen überdiess auch noch auf eine andere Summationsformel hin, die mit keiner der vorstehenden identisch ist.

7.

In meiner vorigen Abhandlung habe ich gezeigt, dass die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = c F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x)$$

wo c eine Function von α , β und γ ohne x ist, allemal statt findet, wenn beide F Functionen endliche Reihen (ganze und rationale Functionen von x und bez. von $1 - x$) sind, die nicht unendlich werden können. Setzt man nun $x = 1$ in die vorstehende Gleichung, so wird die F Function rechter Hand gleich Eins, und man erhält

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = c$$

Setzt man $x = 0$, so wird die F Function linker Hand gleich Eins, und es ergibt sich

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1) = \frac{1}{c} \quad (8)$$

in welcher man darauf γ für $\alpha + \beta - \gamma + 1$ schreiben kann. Die obige Bedingung findet statt, wenn entweder α oder β eine ganze und negative Zahl,*) und nur nicht γ eine kleinere oder eben so grosse, ganze und negative Zahl ist. Ich will daher die obige Gleichung so schreiben:

$$F(-\alpha, \beta, \gamma, x) = c F(-\alpha, \beta, \beta - \alpha - \gamma + 1, 1 - x)$$

wo α eine ganze und positive Zahl sein soll, β und γ aber beliebige reelle Grössen sind, letztere jedoch dem oben aufgestellten Ausnahmefall unterliegt.

Die Constante c kann nun durch die Vergleichung des in jeder F Function mit der höchsten Potenz von x , das ist mit x^α , multiplicirten

*) Die F Functionen können auch bei gebrochenen Werthen der beiden ersten Elemente derselben endliche Reihen werden, wenn nur zwischen α und β gewisse Relationen statt finden; z. B. für $\alpha = -\frac{\alpha'}{2}$, $\beta = -\frac{\alpha'-1}{2}$, wenn α' eine ganze und positive Zahl ist. Diese Fälle werde ich aber hier ausschliessen.

Gliedes bestimmt werden. Man findet leicht das allgemeine Glied der F Function links vom Gleichheitszeichen =

$$(-1)^i \frac{\alpha \cdot \alpha - 1 \dots \alpha - i + 1 \cdot \beta \cdot \beta + 1 \dots \beta + i - 1}{1 \cdot 2 \dots i \cdot \gamma \cdot \gamma + 1 \dots \gamma + i - 1} x^i$$

und das der F Function rechts vom Gleichheitszeichen =

$$(-1)^i \frac{\alpha \cdot \alpha - 1 \dots \alpha - i + 1 \cdot \beta \cdot \beta + 1 \dots \beta + i - 1}{1 \cdot 2 \dots i \cdot \beta - \alpha - \gamma + 1 \cdot \beta - \alpha - \gamma + 2 \dots \beta - \alpha - \gamma + i} (1 - x)^i$$

Das letzte Glied wird daher =

$$(-1)^\alpha \frac{\beta \cdot \beta + 1 \dots \beta + \alpha - 1}{\gamma \cdot \gamma + 1 \dots \gamma + \alpha - 1} x^\alpha$$

$$\text{und bez.} = (-1)^\alpha \frac{\beta \cdot \beta + 1 \dots \beta + \alpha - 1}{\beta - \alpha - \gamma + 1 \cdot \beta - \alpha - \gamma + 2 \dots \beta - \gamma} (1 - x)^\alpha$$

Aber das in der Entwicklung von $(1 - x)^\alpha$ mit x^α multiplicirte Glied ist $= (-x)^\alpha$, hiemit wird sogleich

$$c = (-1)^\alpha \frac{\beta - \alpha - \gamma + 1 \cdot \beta - \alpha - \gamma + 2 \dots \beta - \gamma}{\gamma \cdot \gamma + 1 \dots \gamma + \alpha - 1}$$

Um diesen Ausdruck auf Π Functionen hinzuführen, dient die Fundamentalgleichung der Theorie dieser Functionen, nemlich

$$(z + 1) (z + 2) \dots (z + n) = \frac{\Pi(z + n)}{\Pi(z)}$$

wo z jede beliebige reelle Grösse sein kann, n hingegen eine ganze und positive Zahl sein muss. Wir bekommen hiemit die Gleichung

$$(9) \quad F(-\alpha, \beta, \gamma, x) = (-1)^\alpha \frac{\Pi(\beta - \gamma) \Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\beta - \alpha - \gamma) \Pi(\gamma + \alpha - 1)} F(-\alpha, \beta, \beta - \alpha - \gamma + 1, 1 - x)$$

die auch in § 2 Anwendung finden wird. Setzt man nun hierin $x = 1$, so bekommt man die Summenformel

$$(D) \quad F(-\alpha, \beta, \gamma, 1) = (-1)^\alpha \frac{\Pi(\beta - \gamma) \Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\beta - \alpha - \gamma) \Pi(\gamma + \alpha - 1)}$$

und setzt man $x = 0$, so bekommt man eine Formel, die nach der Substitution von γ für $\beta - \alpha - \gamma + 1$ mit dieser identisch wird. Da

$$\Pi(-z) = \infty$$

wenn z eine ganze und positive Zahl ist, so giebt die Formel (D) folgenden merkwürdigen Satz, dass

$$F(-\alpha, \beta, \gamma, 1) = 0$$

wenn $\beta - \alpha - \gamma$ eine ganze und negative Zahl, und

$$\beta - \gamma \geq 0$$

ist. Wenn $\beta = \gamma$ ist, so versteht sich dieses von selbst, da

$$F(-\alpha, \beta, \beta, 1) = (1 - 1)^\alpha$$

ist, aber wenn das zweite und dritte Element einander nicht gleich sind,

so ist die F Function keine Binomialformel. Die Summenformel (D) wird unbestimmt, wenn β oder γ ganze negative Zahlen sind, welches davon herrührt, dass in diesen Fällen die Constante c eine andere Form annimmt. Sei überhaupt β eine negative Grösse, dann ist leicht zu finden, dass der obige Ausdruck für c die folgende Form annimmt:

$$c = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 1 \cdot \alpha + \beta + \gamma - 2 \dots \beta + \gamma}{\gamma \cdot \gamma + 1 \cdot \dots \gamma + \alpha - 1}$$

Hiemit ergibt sich

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\alpha + \beta + \gamma - 1) \Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\alpha + \gamma - 1) \Pi(\gamma + \beta - 1)} F(-\alpha, -\beta, -(\alpha + \beta + \gamma - 1), 1 - x) \quad (10)$$

und nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\alpha + \beta + \gamma - 1) \Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\alpha + \gamma - 1) \Pi(\gamma + \beta - 1)} \quad (E)$$

die mit der Gaussischen Summenformel (A) identisch wird, wenn darin $-\alpha$ statt α , und $-\beta$ statt β geschrieben wird. Die vorstehende Ableitung setzt zwar voraus, dass α eine ganze und positive Zahl sei, welches die vorhergehende Ableitung der Formel (A), so wie die von Gauss selbst, nicht verlangt, die vorstehende Ableitung zeigt dagegen aber, dass wenn α oder β ganz und positiv ist, die Bedingung $\gamma - \beta - \alpha > 0$ nicht für die Gültigkeit derselben erforderlich ist, welcher Umstand nicht aus jenem Beweise hervorgeht. Setzt man $x = 0$ in (10) und schreibt

$$\gamma \text{ für } \alpha + \beta + \gamma - 1$$

so bekommt man

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma - \alpha) \Pi(\gamma - \beta)}{\Pi(\gamma) \Pi(\gamma - \alpha - \beta)} \quad (F)$$

welche mit der Summationsformel (B) identisch wird, wenn man darin $-\beta$ für β schreibt, woraus folgt, dass diese auch für negative Werthe von β und γ gilt, wenn nur nicht $\gamma - \beta$ oder γ negative und ganze Zahlen sind. Es folgt ferner aus der vorstehenden Summationsformel der Satz, dass

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = 0$$

ist, wenn $\gamma - \alpha - \beta$ eine ganze und negative Zahl ist, und nur nicht zugleich $\gamma - \alpha$ und $\gamma - \beta$ ganze und negative Zahlen sind. Setzt man endlich $-\beta$ für β , und $-\gamma$ für γ in den obigen Ausdruck für c , so entsteht

$$c = (-1)^\alpha \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1 \cdot \alpha + \beta - \gamma - 2 \dots \beta + \gamma}{\gamma \cdot \gamma - 1 \cdot \dots \gamma - \alpha + 1}$$

und hieraus ergibt sich, sowohl für $x = 1$ wie für $x = 0$,

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = (-1)^\alpha \frac{\Pi(\gamma - \alpha) \Pi(\alpha + \beta - \gamma - 1)}{\Pi(\gamma) \Pi(\beta - \gamma - 1)} \quad (G)$$

welche mit (C) identisch ist. Ich bemerke schliesslich, dass man diese Summenformeln auch aus der Gaussischen mittelst der angeführten Fundamentalgleichung der H Functionen ableiten kann.

8.

Wenn man u auf reelle Weise beschränkt, so sind im Vorhergehenden alle Fälle erschöpft, in welchen $Qu^i = 0$ werden kann, giebt man aber u imaginäre Werthe, so werden andere Bedingungen möglich, und es öffnet sich ein neues Feld für die Summation der F Functionen. Der allgemeinste Ausdruck, den man für u wählen kann, ist der folgende:

$$u = r (\cos sy + \sqrt{-1} \cdot \sin sy)$$

wo s , r und y reelle Grössen sind, von welchen ich hier nur y als veränderlich betrachten werde. Substituirt man diesen Ausdruck in (3), und verleibt den constanten Factor $r^{\beta+i-1}$ der willkürlichen Constante k ein, so ergibt sich

$$Qu^i = kp^{\gamma-\beta} \{ \cos [(\gamma-\beta)q + (\beta+i-1)sy] + \sqrt{-1} \cdot \sin [(\gamma-\beta)q + (\beta+i-1)sy] \}$$

wo

$$1 - r \cos sy = p \cos q$$

$$- r \sin sy = p \sin q$$

ist. Derselbe Werth von u giebt ferner, wenn man stets die constanten Factoren der Constante k einverleibt,

$$Pdu = kp^{\gamma-\beta-1} \{ \cos [(\gamma-\beta-1)q + \beta sy] + \sqrt{-1} \cdot \sin [(\gamma-\beta-1)q + \beta sy] \}$$

$$q(xu) = h^{-\alpha} (\cos \alpha l - \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha l)$$

wo

$$1 - xr \cos sy = h \cos l$$

$$- xr \sin sy = h \sin l$$

ist. Substituirt man diese Werthe in (1), und setzt darauf den reellen, und den imaginären Theil dieser Gleichung, jeden für sich, gleich Null, so bekommt man die folgenden zwei Ausdrücke:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_a^b h^{-\alpha} p^{\gamma-\beta-1} \cos [(\gamma-\beta-1)q + \beta sy - \alpha l] dy}{\int_a^b p^{\gamma-\beta-1} \cos [(\gamma-\beta-1)q + \beta sy] dy}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_a^b h^{-\alpha} p^{\gamma-\beta-1} \sin [(\gamma-\beta-1)q + \beta sy - \alpha l] dy}{\int_a^b p^{\gamma-\beta-1} \sin [(\gamma-\beta-1)q + \beta sy] dy}$$

wo die Grenzen der Integrale wieder durch die Bedingung bestimmt werden müssen, dass an jeder derselben der obige Ausdruck für $Qu^i = 0$ werde, ohne zwischen denselben unendlich werden zu können. Es ist hiebei noch zu bemerken, dass wenn nur die eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden, die Grenzen des imaginären Theils anders angenommen werden dürfen wie die des reellen.

9.

Es würde mich zu weit führen, wenn ich jetzt alle Fälle untersuchen wollte, in welchen die Bedingungen für $Qu^i = 0$ erfüllt werden können, ich muss dieses auf eine andere Zeit verschieben, und darf mich hier nur mit dem Falle beschäftigen, welcher in § 2. angewandt werden wird, und überhaupt die Veranlassung dieser Untersuchungen gewesen ist. In diesem Falle sind $-\alpha$, $-\beta$ und γ ganze und positive Zahlen, und es ist überdiess $x = -1$. Führen wir diese Annahmen in die Formeln des vor. Art. ein, so dürfen wir $r = 1$ und $s = 2$ setzen, wodurch

$$p = 2 \sin y, \quad q = \frac{3\pi}{2} + y$$

wird, wenn π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Hiemit erhalten wir, wenn wir fortfahren alle constanten Factoren der willkürlichen Constante einzuverleiben, und $-\beta$ statt β schreiben,

$$Qu^i = k \sin^{\gamma+\beta} y \{ \cos (\gamma - \beta + 2i - 2)y + \sqrt{-1} \cdot \sin (\gamma - \beta + 2i - 2)y \}$$

Da nun γ und β positiv sind, so wird unabhängig von i , $Qu^i = 0$, wenn $y = 0, = \pi, = 2\pi$, etc. wird, ohne je unendlich zu werden. Für die Integrationsgrenzen können wir also setzen

$$a = 0, \quad b = \pi$$

Verbindet man ferner die Annahme $x = -1$ mit $r = 1$ und $s = 2$, so wird

$$h = 2 \cos y, \quad l = y$$

und wenn man diese Werthe in die beiden Summenformeln des vor. Art. substituirt, und darin $-\alpha$ statt α , und $-\beta$ statt β schreibt, so wird

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = 2^\alpha \frac{\int_0^\pi \cos^\alpha y \sin^{\gamma+\beta-1} y \cdot \cos (\gamma - \beta + \alpha - 1)y \cdot dy}{\int_0^\pi \sin^{\gamma+\beta-1} y \cdot \cos (\gamma - \beta - 1)y \cdot dy}$$

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = 2^\alpha \frac{\int_0^\pi \cos^\alpha y \sin^{\gamma+\beta-1} y \cdot \sin (\gamma - \beta + \alpha - 1)y \cdot dy}{\int_0^\pi \sin^{\gamma+\beta-1} y \cdot \sin (\gamma - \beta - 1)y \cdot dy}$$

Ich lege in diesen Formeln den Elementen α , β und γ die Bedeutung unter, dass sie ganze und positive Zahlen sein sollen, weil dieses der Fall ist, in welchem ich sie weiter unten anwenden werde. Es ist aber leicht zu erkennen, dass die Gültigkeit derselben nicht auf diese Bedingungen beschränkt ist.

40.

Für die Anwendung der eben gefundenen Summenformeln auf den genannten Fall ist vor Allem zu bemerken, dass man sich der ersten bedienen muss, wenn $\gamma + \beta - 1$ eine grade Zahl ist, indem in diesem Falle der zweite Ausdruck $\frac{0}{0}$ wird. Wenn dagegen $\gamma + \beta - 1$ eine ungrade Zahl ist, so muss die zweite Summenformel angewandt werden, indem dann der erste Ausdruck $\frac{0}{0}$ wird. Es tritt hier der Fall ein, dessen in Art. 2 gedacht wurde, dass nemlich in den angeführten Fällen die Gleichung (2) $0 = 0$ wird, und daher nichts bedeuten kann.

Um die Integrationen auszuführen, sei nun

wenn $\gamma + \beta - 1$ grade ist,

$$\cos^{\alpha} y \cdot \sin^{\gamma+\beta-1} y = \frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-1}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}} \{a_0 \cos(\gamma + \beta + \alpha - 1)y + a_1 \cos(\gamma + \beta + \alpha - 3)y + \dots$$

$$+ a_1 \cos(-\gamma - \beta - \alpha + 3)y + a_0 \cos(-\gamma - \beta - \alpha + 1)y\}$$

und wenn $\gamma + \beta - 1$ ungrade ist,

$$\cos^{\alpha} y \cdot \sin^{\gamma+\beta-1} y = \frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-2}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}} \{a_0 \sin(\gamma + \beta + \alpha - 1)y + a_1 \sin(\gamma + \beta + \alpha - 3)y + \dots$$

$$- a_1 \sin(-\gamma - \beta - \alpha + 3)y - a_0 \sin(-\gamma - \beta - \alpha + 1)y\}$$

dann ist offenbar im ersten Falle

$$\int_0^{\pi} \cos^{\alpha} y \cdot \sin^{\gamma+\beta-1} y \cdot \cos(\gamma - \beta + \alpha - 1)y \cdot dy = \pi \frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-1}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}} a_{\beta}$$

und im zweiten Falle

$$\int_0^{\pi} \cos^{\alpha} y \cdot \sin^{\gamma+\beta-1} y \cdot \sin(\gamma - \beta + \alpha - 1)y \cdot dy = \pi \frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-2}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}} a_{\beta}$$

Die Integrale der Nenner können wir bekannten Formeln entnehmen, denn man weiss dass

$$\int_0^\pi \sin^{2q} y \cdot \cos 2py \cdot dy = (-1)^p \pi \frac{\Pi(2q)}{2^{2q} \Pi(q+p) \Pi(q-p)}$$

$$\int_0^\pi \sin^{2q+1} y \cdot \sin(2p+1)y \cdot dy = (-1)^p \pi \frac{\Pi(2q+1)}{2^{2q+1} \Pi(q+p+1) \Pi(q-p)}$$

ist, wenn p und q ganze und positive Zahlen bedeuten, und

$$p \leq q$$

ist. Substituirt man diese Ausdrücke in die Summenformeln des vor. Art., so ergibt sich, $\gamma + \beta$ mag grade oder ungrade sein,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = (-1)^\beta \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\beta)}{\Pi(\gamma+\beta-1)} \alpha_\beta \quad (11)$$

für welche nur noch der Ausdruck von α_β zu ermitteln ist. Es ist vielleicht überflüssig diesem hinzuzufügen, dass wenn z eine ganze und positive Zahl ist,

$$\Pi(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z$$

und ausserdem

$$\Pi(0) = 1$$

ist. Zur obigen Summenformel ist noch zu bemerken, dass durch die Vertauschung der Elemente α und β mit einander daraus eine ähnliche entsteht, die im Allgemeinen die Summation vermittelt anderer Zahlenwerthe der in dem Ausdruck vorkommenden Factoren giebt, und dass daher Fälle vorkommen können, in welchen es in den Anwendungen vortheilhafter ist, sich der durch diese Vertauschung entstehenden Summenformel zu bedienen.

Diese Formel giebt nicht bloß die Summe der bezeichneten F Function, sondern auch die einiger anderen. Die allgemeine Verwandlungsformel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1})$$

giebt

$$F(-\alpha, \gamma+\beta, \gamma, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^\alpha} F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1)$$

$$F(\gamma+\alpha, -\beta, \gamma, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^\beta} F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1)$$

und die Summenformel (11) giebt daher auch die Summe dieser beiden F Functionen, in welchen das vierte Element $= \frac{1}{2}$ ist. Ferner, die Gleichung (10) des Art. 7. giebt wenn man $x = -1$ setzt

$$F(-\alpha, -\beta, -(\alpha+\beta+\gamma-1), 2) = \frac{\Pi(\alpha+\gamma-1) \Pi(\beta+\gamma-1)}{\Pi(\alpha+\beta+\gamma-1) \Pi(\gamma-1)} F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1)$$

und die vorstehende allgemeine Verwandlungsformel giebt, wenn man $x = 2$ setzt,

$$\begin{aligned} F(-\alpha, -\beta, -(\alpha+\beta+\gamma-1), 2) &= (-1)^\alpha F(-\alpha, -(\alpha+\gamma-1), -(\alpha+\beta+\gamma-1), 2) \\ &= (-1)^\beta F(-(\beta+\gamma-1), -\beta, -(\alpha+\beta+\gamma-1), 2) \end{aligned}$$

weshalb man auch die Summe dieser F Functionen, deren letztes Element $= 2$ ist, durch (44) erhält.

44.

Zur Ermittlung des Ausdrucks für α_β werde ich mich der imaginären Exponentialfunctionen bedienen. Setzt man

$$2 \cos y = z + \frac{1}{z}$$

und substituirt diesen Werth, so wie die andern auf bekannte Weise daraus folgenden, in die Gleichungen

$$\cos^\alpha y \sin^k y = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{\alpha+k}} \{a_0 \cos(\alpha+k)y + a_1 \cos(\alpha+k-2)y + \dots\}$$

und bez.

$$\cos^\alpha y \sin^k y = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{\alpha+k}} \{a_0 \sin(\alpha+k)y + a_1 \sin(\alpha+k-2)y + \dots\}$$

des vor. Art., in welchen ich zur Abkürzung k statt $\gamma + \beta - 1$ geschrieben habe, so werden beide durch die folgende Eine dargestellt,

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^\alpha \left(z - \frac{1}{z}\right)^k = a_0 z^{\alpha+k} + a_1 z^{\alpha+k-2} + a_2 z^{\alpha+k-4} + \dots$$

die man durch Anwendung bekannter Verfahren entwickeln kann. Nimmt man die Logarithmen, so wird

$$\alpha \log\left(z + \frac{1}{z}\right) + k \log\left(z - \frac{1}{z}\right) = \log(a_0 z^{\alpha+k} + a_1 z^{\alpha+k-2} + a_2 z^{\alpha+k-4} + \dots)$$

welche Gleichung durch die Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \left(z - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right) + k \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right)}{z^2 - \frac{1}{z^2}} &= \\ \frac{(\alpha+k) a_0 z^{\alpha+k-1} + (\alpha+k-2) a_1 z^{\alpha+k-3} + (\alpha+k-4) a_2 z^{\alpha+k-5} + \dots}{a_0 z^{\alpha+k} + a_1 z^{\alpha+k-2} + a_2 z^{\alpha+k-4} + \dots} &= \end{aligned}$$

gibt. Schafft man hier die Nenner weg, vergleicht die gleichartigen Glieder mit einander, und schreibt wieder $\beta + \gamma - 1$ statt k , so bekommt man, da ausserdem leicht zu finden ist, dass $a_0 = 1$ wird,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= (\alpha - \beta - \gamma + 1) \\ a_2 &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta - \gamma + 1) a_1 - \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma - 1) \\ a_3 &= \frac{1}{3} (\alpha - \beta - \gamma + 1) a_2 - \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma - 2) a_1 \\ a_4 &= \frac{1}{4} (\alpha - \beta - \gamma + 1) a_3 - \frac{1}{4} (\alpha + \beta + \gamma - 3) a_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

woraus jeder a Coefficient mit Sicherheit berechnet werden kann.

Um dieses durch ein Beispiel zu zeigen, sei ausser $x = -1$,

$$\alpha = 12, \beta = 8, \gamma = 1,$$

dann wird

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = 4, \quad \alpha + \beta + \gamma - 1 = 20$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \frac{4}{2} a_1 - \frac{20}{2} = -2$$

$$a_3 = \frac{4}{3} a_2 - \frac{19}{3} a_1 = -28$$

$$a_4 = \frac{4}{4} a_3 - \frac{18}{4} a_2 = -19$$

$$a_5 = \frac{4}{5} a_4 - \frac{17}{5} a_3 = +80$$

$$a_6 = \frac{4}{6} a_5 - \frac{16}{6} a_4 = +104$$

$$a_7 = \frac{4}{7} a_6 - \frac{15}{7} a_5 = -112$$

$$a_8 = \frac{4}{8} a_7 - \frac{14}{8} a_6 = -238$$

Es ist leicht zu finden, dass

$$a_k = (-1)^{\beta+\gamma-1} a_{\alpha+\beta+\gamma-1-k}$$

ist, und wenn man daher diese Rechnung weiter fortsetzt, so muss man nothwendig auf dieselben Zahlen zurückkommen, wodurch man eine Controlle der Rechnung erhält. Eine andere Eigenschaft der a Coefficienten ist die, dass sie alle unter den obigen Voraussetzungen ganze Zahlen sein müssen, diese kann auch oft dienen um Fehler in der Berechnung derselben zu entdecken. Durch die Summenformel (11) erhält man nun

$$F(-12, -8, 1, -1) = -238 \frac{H^{(0)} H^{(8)}}{H^{(8)}} = -238$$

Rechnet man die Reihe selbst, so wird

$$\begin{aligned}
 F(-12, -8, 4, -4) &= 1 - \frac{12 \cdot 8}{1 \cdot 1} + \frac{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \mp \text{etc.} \\
 &= 1 - 96 + 1848 - 12320 + 34650 - 44352 \\
 &\quad + 25872 - 6336 + 495 \\
 &= -238
 \end{aligned}$$

wie oben.

12.

Man kann auch Ausdrücke geben, durch welche die a Coefficienten, jeder für sich, erhalten werden. Sei ε eine ganze und positive Zahl, und

$$\begin{aligned}
 \alpha - \beta - \gamma + 1 &= \pm \varepsilon \\
 \alpha + \beta + \gamma - 1 &= \lambda
 \end{aligned}$$

dann ist auch stets $\frac{\lambda - \varepsilon}{2}$ eine ganze und positive Zahl, die Null eingeschlossen. Es wird hiemit

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^\alpha \left(z - \frac{1}{z}\right)^{\beta + \gamma - 1} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^{\frac{\lambda + \varepsilon}{2}} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{\frac{\lambda - \varepsilon}{2}} = \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\lambda - \varepsilon}{2}} \left(z \pm \frac{1}{z}\right)^\varepsilon$$

und die Entwicklung der Binomien giebt

$$\begin{aligned}
 \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\lambda - \varepsilon}{2}} &= z^{\lambda - \varepsilon} - \frac{\lambda - 2}{2} z^{\lambda - \varepsilon - 4} + \frac{\lambda - \varepsilon \cdot \lambda - \varepsilon - 2}{2 \cdot 4} z^{\lambda - \varepsilon - 8} \mp \text{etc.} \\
 \left(z \pm \frac{1}{z}\right)^\varepsilon &= z^\varepsilon \pm \frac{\varepsilon}{1} z^{\varepsilon - 2} + \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1}{1 \cdot 2} z^{\varepsilon - 4} \pm \text{etc.}
 \end{aligned}$$

woraus sogleich

$$(13) \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \pm \frac{\varepsilon}{1} \\ a_2 &= \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1}{1 \cdot 2} - \frac{\lambda - \varepsilon}{2} \\ a_3 &= \pm \left\{ \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\varepsilon}{1} \cdot \frac{\lambda - \varepsilon}{2} \right\} \\ a_4 &= \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \varepsilon - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\lambda - \varepsilon}{2} + \frac{\lambda - \varepsilon \cdot \lambda - \varepsilon - 2}{2 \cdot 4} \\ a_5 &= \pm \left\{ \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\lambda - \varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{1} \cdot \frac{\lambda - \varepsilon \cdot \lambda - \varepsilon - 2}{2 \cdot 4} \right\} \\ a_6 &= \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\lambda - \varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\lambda - \varepsilon \cdot \lambda - \varepsilon - 2}{2 \cdot 4} - \frac{\lambda - \varepsilon \cdot \lambda - \varepsilon - 2 \cdot \lambda - \varepsilon - 4}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

folgt. Wenn man den letzten der durch (12) berechneten a Coefficienten auch durch den bezüglichen Ausdruck (13) berechnet, so erhält man

auch eine Controlle für die Richtigkeit der numerischen Rechnung. Für das obige Beispiel wird $\varepsilon = 4$ und $\lambda = 20$, und daher durch (13)

$$a_8 = 28 - 336 + 70 = -238$$

wie oben.

13.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die Π Functionen, die wir hier betrachtet haben, sich im Allgemeinen nicht durch ein einziges, aus Π Functionen bestehendes Glied darstellen lassen, es giebt jedoch besondere Fälle, in welchen dieses möglich wird. Unter diesen will ich erst den Fall

$$\varepsilon = 0$$

betrachten. Die Gleichungen (12) geben in diesem Falle sogleich

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - 1)$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma - 3)a_2$$

etc.

und es wird daher, wenn ausserdem β ungrade ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = 0$$

und wenn β grade ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = (-1)^{\frac{1}{2}\beta} \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\beta)}{\Pi(\frac{1}{2}\beta) \Pi(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}$$

welcher Ausdruck denen der Art. 5. und 6. analog ist. Ein anderer Fall, in welchem ein analoger Ausdruck entsteht, ist der, wo

$$\varepsilon = 1$$

ist. Die Ausdrücke (13) geben in diesem Falle

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \pm 1$$

$$a_2 = -\frac{\lambda-1}{2}$$

$$a_3 = \mp \frac{\lambda-1}{2}$$

$$a_4 = \frac{\lambda-1 \cdot \lambda-3}{2 \cdot 4}, \quad a_5 = \pm \frac{\lambda-1 \cdot \lambda-3}{2 \cdot 4}$$

etc.

etc.

Hieraus folgt,

wenn β eine grade Zahl ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = (-1)^{\frac{\beta}{2}} \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\beta) \Pi\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{2}\right)}{\Pi(\gamma+\beta-1) \Pi\left(\frac{\alpha+\gamma-2}{2}\right) \Pi\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

und wenn β eine ungrade Zahl ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = \mp (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \frac{\Pi(\gamma-1) \Pi(\beta) \Pi\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{2}\right)}{\Pi(\gamma+\beta-1) \Pi\left(\frac{\alpha+\gamma-1}{2}\right) \Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = +1$$

und das untere, wenn

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = -1$$

ist. In meiner vorigen Abhandlung habe ich durch eine, von der hier angewandten gänzlich verschiedene, Methode die Function

$$F(-\mu, \mu, 1, \sin^2 k)$$

und deren erstes Differential in Bezug auf k , in dem Falle wo $k = \frac{\pi}{4}$ summirt, diese Functionen gehören in den eben behandelten Fall, und ich werde daher zeigen, dass das sich aus den hier entwickelten Ausdrücken ergebende Resultat mit jenem übereinstimmt. Es wird vermittelt eines bekannten Satzes

$$\frac{dF(-\mu, \mu, 1, \sin^2 k)}{dk} = -2\mu^2 \sin k \cos k F(1-\mu, 1+\mu, 2, \sin^2 k)$$

und die beiden zu summirenden Functionen sind daher

$$F(-\mu, \mu, 1, \frac{1}{2}) \text{ und } -\mu^2 F(1-\mu, 1+\mu, 2, \frac{1}{2})$$

die ich der Kürze wegen mit F und F' bezeichnen werde. Durch die Verwandlungsformeln des Art. 9. bekommt man nun zuerst

$$F = \frac{1}{2^\mu} F(-\mu, 1-\mu, 1, -1)$$

$$F' = -\frac{\mu^2}{2^{\mu-1}} F(1-\mu, 1-\mu, 2, -1)$$

Es ist also hier bezüglich

$$\alpha = \mu, \quad \beta = \mu - 1, \quad \gamma = 1$$

und

$$\alpha = \mu - 1, \quad \beta = \mu - 1, \quad \gamma = 2$$

es wird daher für die erste Function

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = +1$$

und für die zweite

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = -1$$

Substituirt man diese Werthe der Elemente α , β und γ in die obigen Summenformeln, so bekommt man

wenn μ ungrade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{2^\mu} \frac{\Pi(\mu-1)}{\left(\Pi\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\right)^2}$$

$$F' = (-1)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{\mu}{2^{\mu-1}} \frac{\Pi(\mu-1)}{\left(\Pi\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\right)^2} = -2\mu F$$

und wenn μ grade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) \Pi\left(\frac{\mu-2}{2}\right)}$$

$$F' = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\mu}{2^{\mu-1}} \frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi\left(\frac{\mu}{2}\right) \Pi\left(\frac{\mu-2}{2}\right)} = 2\mu F$$

oder wenn man die Π Functionen ausschreibt,

wenn μ ungrade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \mu-2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \mu-1}$$

$$F' = -2\mu F$$

und wenn μ grade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \mu-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \mu}$$

$$F' = 2\mu F$$

mit jenen Resultaten übereinstimmend.

§ II.

Entwicklung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function

$$r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$$

nach den Potenzen von r und r' , und den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der wahren Anomalien.

14.

Es sollen fortwährend r der Radius Vector des Planeten m , r' der des Planeten m' bedeuten, und

$$r' > r$$

sein. Den Winkel zwischen dem Radius r und der gegenseitigen Knotenlinie der beiden Bahnebenen nenne ich U , und den zwischen r' und demselben Theil derselben Knotenlinie U' ; die Neigung der Bahnebenen gegen einander sei J . Es ist zwar hier gleichgültig, ob man für J den spitzen oder den stumpfen Winkel wählt, den die beiden Bahnebenen mit einander machen, um aber von einer festen Regel auszugehen, werde ich annehmen, dass J nie grösser sei wie 90° . Die Winkel U und U' müssen ihren Anfang in den Theilen der Bahnebenen nehmen, die diesen Winkel J einschliessen, und es ist folglich, wenn der Winkel zwischen r und r' mit H bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}\cos H &= \cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J \\ &= \cos \frac{1}{2}J \cos (U' - U) + \sin \frac{1}{2}J \cos (U' + U)\end{aligned}$$

Nennt man die gegenseitige Entfernung der beiden Planeten Δ , so wird

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \frac{1}{2}J \cos (U' - U) - 2rr' \sin \frac{1}{2}J \cos (U' + U)$$

Um diesen Ausdruck, so wie dessen Entwicklung, auf den Fall anzuwenden zu können, wo der eine der beiden Himmelskörper rückläufig ist, braucht man nur in den Formeln der elliptischen Bewegung desselben die mittlere Bewegung negativ anzunehmen. Sei nun

$$\frac{r}{r'} \cos \frac{1}{2}J = \alpha; \quad \frac{r}{r'} \sin \frac{1}{2}J = \beta,$$

dann lässt sich der vorstehende Ausdruck leicht auf folgende Form bringen,

$$(14) \quad \frac{\Delta^2}{r'^2} = 1 - 2\alpha \cos (U' - U) - 2\beta \cos (U' + U) + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

die eine Verallgemeinerung der bekannten Form

$$1 - 2\gamma \cos x + \gamma^2$$

ist, und in diese übergeht, wenn man entweder α oder β gleich Null macht. Setzt man ferner

$$2 \cos (U' - U) = p + \frac{1}{p}, \quad 2 \cos (U' + U) = q + \frac{1}{q}$$

dann sind p und q die den Bögen $U' - U$ und $U' + U$ zukommenden, imaginären Exponentialfunctionen; nemlich, wenn man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit c bezeichnet,

$$p = c^{(U'-U)\sqrt{-1}}, \quad q = c^{(U'+U)\sqrt{-1}}$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke bringt man (14) auf folgende Form

$$(15) \quad \frac{\Delta^2}{r'^2} = (1 - \alpha p - \beta q) \left(1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}\right) - \alpha\beta \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

welche ich der beabsichtigten Reihenentwicklung zu Grunde legen werde.

45.

Durch die Entwicklung der Factoren und des Quadrats des Ausdrucks (45) kann man leicht seine Identität mit dem Ausdruck (44) nachweisen, allein man kann ihn auch auf die folgende Art direct finden. Ich beziehe die beiden Körper m und m' auf die Achsen der rechtwinklichen Coordinaten x, y, z , und x', y', z' . Die Ebene der Bahn des m' soll die xy Ebene, und der aufsteigende Knoten von m auf m' die x Achse sein, dann haben die Coordinaten von m und m' folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned} x &= r \cos U, & x' &= r' \cos U' \\ y &= r \cos J \sin U, & y' &= r' \sin U' \\ z &= r \sin J \sin U, & z' &= 0 \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2 \\ &= \{x' - x - (y' - y) \sqrt{-1}\} \{x' - x + (y' - y) \sqrt{-1}\} + z^2 \quad (46) \end{aligned}$$

Die vorstehenden Ausdrücke der Coordinaten geben aber

$$\begin{aligned} x' - x - (y' - y) \sqrt{-1} &= r' (\cos U' - \sqrt{-1} \sin U') - r (\cos U - \sqrt{-1} \cos J \sin U) \\ &= r' \left(c^{-U' \sqrt{-1}} - \frac{r}{r'} \cos^2 \frac{1}{2} J \cdot c^{-U' \sqrt{-1}} - \frac{r}{r'} \sin^2 \frac{1}{2} J \cdot c^{U' \sqrt{-1}} \right) \\ &= r' c^{-U' \sqrt{-1}} (1 - \alpha c^{(U' - U) \sqrt{-1}} - \beta c^{(U' + U) \sqrt{-1}}) \\ &= r' c^{-U' \sqrt{-1}} (1 - \alpha p - \beta q) \end{aligned}$$

und wenn man hierin $-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$ schreibt, so erfolgt

$$x' - x + (y' - y) \sqrt{-1} = r' c^{U' \sqrt{-1}} \left(1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} \right)$$

Die Gleichungen

$$p = c^{(U' - U) \sqrt{-1}}, \quad q = c^{(U' + U) \sqrt{-1}}$$

geben

$$c^{U \sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

also

$$2 \sqrt{-1} \sin U = \sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}$$

und hiemit erhält man

$$z^2 = -r'^2 \alpha \beta \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^2$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (46), so geht (45) daraus hervor.

16.

Ich werde nun zuerst den Ausdruck (15) nach den Potenzen von α und β entwickeln, und den allgemeinen Ausdruck der Coefficienten ableiten, es ist klar, dass man durch die Summation dieses Ausdrucks in Bezug auf alle Glieder, für welche die Summe der Exponenten von α und β dieselbe ist, den Coefficienten der betreffenden Potenz von $\frac{r}{r'}$ erhält. Sei

$$F = 1 - \alpha p - \beta q, \quad F' = 1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}$$

dann wird (15)

$$\frac{\Delta^2}{r'^2} = FF' - \alpha\beta \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^2$$

und die Reihenentwicklung giebt zuerst

$$\frac{r'}{\Delta} = \frac{1}{(FF')^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta}{(FF')^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\alpha^2 \beta^2}{(FF')^{\frac{5}{2}}} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^4 + \text{etc.}$$

Von dieser Reihe lässt sich leicht das allgemeine Glied aufstellen. Der u^{te} Binomialcoefficient der Potenz $-\frac{2m+1}{2}$ hat folgenden Ausdruck

$$(17) \quad \frac{II(2m+2u) II(m)}{2^{2u} II(m+u) II(2m) II(u)}$$

wo die Argumente der II Functionen stets ganze und positive Zahlen sind, weil m eine solche Zahl bedeutet. Also der u^{te} Coefficient der Potenz $-\frac{1}{2}$ ist =

$$\frac{II(2u)}{2^{2u} (II(u))^2}$$

und die obige Reihe wird daher durch folgenden allgemeinen Ausdruck dargestellt,

$$(18) \quad \frac{r'}{\Delta} = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \beta^u \frac{II(2u)}{2^{2u} (II(u))^2} (FF')^{-\frac{2u+1}{2}} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{2u}$$

welcher nun weiter zu entwickeln ist.

17.

Durch Hülfe des Ausdrucks (17) bekommen wir zuerst

$$F^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum \frac{II(2u+2n) II(u)}{2^{2n} II(u+n) II(2u) II(n)} (\alpha p + \beta q)^n$$

aber der Coefficient von $\alpha^k \beta^l$ in der n^{ten} Potenz von $\alpha p + \beta q$ ist =

$$\frac{k+l \cdot k+l-1 \cdot k+l-2 \dots k+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots l}$$

und da in jedem Gliede $k+l=n$ ist, so kann man diesen Coefficienten auch so schreiben

$$\frac{II(n)}{II(k) II(l)}$$

Es wird also

$$F^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum \alpha^k \beta^l \frac{\Pi(2u+2n) \Pi(u)}{2^{2n} \Pi(u+n) \Pi(2u) \Pi(k) \Pi(l)} p^k q^l$$

Der Coefficient von $\alpha^k \beta^l$ ist hier stets ein einziges Glied, welches auch mit $p^k q^l$ multiplicirt ist, da nun F' aus F durch Verwandlung von p in p^{-1} und q in q^{-1} hervorgeht, so wird die Entwicklung von $F'^{-\frac{2u+1}{2}}$ aus der eben abgeleiteten durch bloße Verwandlung von $p^k q^l$ in $p^{-k} q^{-l}$ erhalten. Es ist daher

$$F'^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum \alpha^k \beta^l \frac{\Pi(2u+2n) \Pi(u)}{2^{2n} \Pi(u+n) \Pi(2u) \Pi(k) \Pi(l)} p^{-k} q^{-l}$$

Im Product dieser beiden Grössen kann der Factor $\alpha^k \beta^l$ durch alle möglichen Verbindungen von $k=0, l=0$ bis $k=k, l=l$ hervor- gebracht werden. Nämlich die in $F'^{-\frac{2u+1}{2}}$ mit

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^0 \beta^0, & \alpha^0 \beta, & \alpha^0 \beta^2, & \dots & \alpha^0 \beta^l \\ \alpha \beta^0, & \alpha \beta, & \alpha \beta^2, & \dots & \alpha \beta^l \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha^k \beta^0, & \alpha^k \beta^1, & \alpha^k \beta^2, & \dots & \alpha^k \beta^l \end{array}$$

multiplicirten Glieder geben, wenn sie bez. mit den in $F^{-\frac{2u+1}{2}}$ mit

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^k \beta^l, & \alpha^k \beta^{l-1}, & \alpha^k \beta^{l-2}, & \dots & \alpha^k \beta^0 \\ \alpha^{k-1} \beta^l, & \alpha^{k-1} \beta^{l-1}, & \alpha^{k-1} \beta^{l-2}, & \dots & \alpha^{k-1} \beta^0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha^0 \beta^l, & \alpha^0 \beta^{l-1}, & \alpha^0 \beta^{l-2}, & \dots & \alpha^0 \beta^0 \end{array}$$

multiplicirten verbunden werden, Glieder die alle mit $\alpha^k \beta^l$ multiplicirt sind. Diese Verbindungen sind die einzigen, die solche Glieder hervor- bringen können, und sie unterscheiden sich alle durch die Exponenten, die p und q bekommen. Diese sind für die obigen Verbindungen der Reihe nach

$$\begin{array}{ccccccc} p^k q^l, & p^k q^{l-2}, & p^k q^{l-4}, & \dots & p^k q^{-l} \\ p^{k-2} q^l, & p^{k-2} q^{l-2}, & p^{k-2} q^{l-4}, & \dots & p^{k-2} q^{-l} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p^{-k} q^l, & p^{-k} q^{l-2}, & p^{-k} q^{l-4}, & \dots & p^{-k} q^{-l} \end{array}$$

Der Coefficient eines jeden dieser Glieder ist Ein Glied, denn jede dieser Potenzen wird in dem Coefficienten von $\alpha^k \beta^l$ nur Einmal hervorgebracht.

Denkt man sich nun ausser unter k und l auch unter τ und σ zwei ganze und positize Zahlen, die Null eingeschlossen, so kann man das allgemeine Glied

$$\text{in } (FF')^{-\frac{2u+1}{2}} \text{ mit } \alpha^k \beta^l p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$$

multiplicirt sich denken, und dieses kann nur auf Eine Art, nemlich durch die Multiplication des

$$\text{in } F' - \frac{2u+1}{2} \text{ von } \alpha^\tau \beta^\sigma p^{-\tau} q^{-\sigma}$$

abhängigen mit dem

$$\text{in } F - \frac{2u+1}{2} \text{ von } \alpha^{k-\tau} \beta^{l-\sigma} p^{k-\tau} q^{l-\sigma}$$

abhängigen entstehen. Setzt man daher

$$(19) \quad (FF') - \frac{2u+1}{2} = \sum M(k, l) \alpha^k \beta^l$$

wo also überhaupt $M(k, l)$ den Coefficienten des in $(FF') - \frac{2u+1}{2}$ mit $\alpha^k \beta^l$ multiplicirten Gliedes bezeichnet, und

$$(19^*) \quad M(k, l) = \sum N(\tau, \sigma) p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$$

so dass überhaupt $N(\tau, \sigma)$ den Coefficienten des in $M(k, l)$ mit $p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$ multiplicirten Gliedes bezeichnet, so erhält man sogleich

$$(20) \quad N(\tau, \sigma) = \frac{II(2u+2v+2w) II(2u+2\tau+2\sigma) (II(u))^2}{2^{2n} II(u+v+w) II(u+\tau+\sigma) (II(2u))^2 II(v) II(w) II(\tau) II(\sigma)}$$

wo

$$n = k + l, \quad v = k - \tau, \quad w = l - \sigma$$

ist. Die eine Summation des Ausdrucks (19*) muss

$$\text{von } \tau = 0 \text{ bis } \tau = k$$

und die andere

$$\text{von } \sigma = 0 \text{ bis } \sigma = l$$

ausgedehnt werden. Da aber das Product FF' reel ist, und keine Sinusse enthält, so müssen die Coefficienten der negativen Potenzen von p und q denen der gleichen positiven gleich sein, und gleiches algebraisches Zeichen haben. Man braucht daher die Summation nur bis dahin auszudehnen wo beide Exponenten negativ werden.

18.

Da der r^{te} Binomialcoefficient der m^{ten} Potenz

$$= \frac{II(m)}{II(r) II(m-r)}$$

ist, so bekommt man sogleich

$$(20^*) \quad \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{2u} = \frac{p^u}{q^u} + \frac{II(2u)}{II(2) II(2u-2)} \frac{p^{u-2}}{q^{u-2}} + \frac{II(2u)}{II(u) II(2u-4)} \frac{p^{u-4}}{q^{u-4}} + \dots + \frac{q^u}{p^u} \\ - \left\{ \frac{II(2u)}{II(1) II(2u-1)} \frac{p^{u-1}}{q^{u-1}} + \frac{II(2u)}{II(3) II(2u-3)} \frac{p^{u-3}}{q^{u-3}} + \dots + \frac{II(2u)}{II(1) II(2u-1)} \frac{q^{u-1}}{p^{u-1}} \right\}$$

Es ergibt sich aus diesem Ausdruck, dass die Form der Glieder in dem Coefficienten von $\alpha^k \beta^l$ in der Entwicklung von $\frac{r'}{\Delta}$ schliesslich eine zweifache ist, und dass die Glieder der einen Form, welche aus der ersten Zeile des vorstehenden Ausdrucks entstehen werden, mit

$$p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$$

hingegen die der andern Form, die aus der zweiten Zeile hervorgehen werden, mit

$$p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1}$$

multiplicirt sein werden. Setzt man daher

$$\frac{r'}{\Delta} = \sum_0^\infty E(k, l) \alpha^k \beta^l$$

so wird der Coefficient $E(k, l)$ die folgende Form haben

$$E(k, l) = \sum G(\tau, \sigma) p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} - \sum H(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1} \quad (21)$$

und die Aufgabe besteht zunächst darin, die Ausdrücke dieser G und H Coefficienten durch bekannte Grössen zu erlangen.

Substituirt man zuerst den Ausdruck (19) in (18), so bekommt man

$$\begin{aligned} E(k, l) &= M(k-u, l-u) \frac{II(2u)}{2^{2u} (II(u))^2} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{2u} \\ &= M'(k, l) \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{2u} \end{aligned} \quad (22)$$

wenn man

$$M'(k, l) = \frac{II(2u)}{2^{2u} (II(u))^2} M(k-u, l-u)$$

setzt. Setzt man andrer Seits

$$M'(k, l) = \sum N'(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-u} q^{l-2\sigma-u} \quad (23)$$

dann giebt der Ausdruck (20)

$$N'(\tau, \sigma) = \frac{II(2v+2w-2u) II(2u+2\tau+2\sigma)}{2^{2n-2u} II(v+w-u) II(\tau+\sigma+u) II(2u) II(v-u) II(w-u) II(\tau) II(\sigma)} \quad (24)$$

indem durch die Substitutionen $k-u$ statt k , und $l-u$ statt l

$$n \text{ in } n-2u, v \text{ in } v-u, \text{ und } w \text{ in } w-u$$

übergehen. Schreibt man nun zur Abkürzung

$$\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{2u} = X - X'$$

und versteht unter X die erste, und unter $-X'$ die zweite Zeile des Ausdrucks rechter Hand in der Gleichung (20*), so wird vermöge der Gleichungen (21), (22) und (23), zuerst

$$\begin{aligned} \sum G(\tau, \sigma) p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} &= \sum X N'(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-u} q^{l-2\sigma-u} \\ \sum H(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1} &= \sum X' N'(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-u} q^{l-2\sigma-u} \end{aligned}$$

und da diese Gleichungen identisch sein müssen, so bekommt man durch die Substitution der Ausdrücke von X und X' in dieselben sogleich

$$G(\tau, \sigma) = \sum \left\{ N'(\tau, \sigma - u) + \frac{H(2u)}{H(2)H(2u-2)} N'(\tau-1, \sigma-u+1) + \dots \right. \\ \left. + \frac{H(2u)}{H(2)H(2u-2)} N'(\tau-u+1, \sigma-1) + N'(\tau-u, \sigma) \right\} \\ H(\tau, \sigma) = \sum \left\{ \frac{H(2u)}{H(1)H(2u-1)} N'(\tau, \sigma-u+1) + \frac{H(2u)}{H(3)H(2u-3)} N'(\tau-1, \sigma-u+2) + \dots \right. \\ \left. + \frac{H(2u)}{H(3)H(2u-3)} N'(\tau-u+2, \sigma-1) + \frac{H(2u)}{H(1)H(2u-1)} N'(\tau-u+1, \sigma) \right\}$$

wo die Summationen sich auf u beziehen, und auf alle Werthe desselben ausgedehnt werden müssen, die Glieder geben, die nicht Null werden.

19.

Substituirt man nun für die N' Coefficienten ihren Ausdruck (24) in die oben erhaltenen Ausdrücke, so ergibt sich

$$(25) \quad G(\tau, \sigma) = KT, \quad H(\tau, \sigma) = K'T'$$

wenn

$$K = \frac{H(2v+2w)H(2\tau+2\sigma)}{2^{2n}H(v+w)H(\tau+\sigma)H(v)H(w)H(\tau)H(\sigma)} \\ T = \sum \left\{ \frac{2^{2u}H(v)H(\sigma)}{H(v-u)H(\sigma-u)H(2u)} + \frac{2^{2u}H(v)H(w)H(\tau)H(\sigma)}{H(v-u+1)H(\sigma-u+1)H(w-1)H(\tau-1)H(2u-2)H(2)} \right. \\ \left. + \frac{2^{2u}H(v)H(w)H(\tau)H(\sigma)}{H(v-u+2)H(\sigma-u+2)H(w-2)H(\tau-2)H(2u-4)H(4)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{2^{2u}H(v)H(w)H(\tau)H(\sigma)}{H(w-u+1)H(\tau-u+1)H(v-1)H(\sigma-1)H(2u-2)H(2)} \right. \\ \left. + \frac{2^{2u}H(w)H(\tau)}{H(w-u)H(\tau-u)H(2u)} \right\} \\ K' = \frac{H(2v+2w-2)H(2\tau+2\sigma+2)}{2^{2n}H(v+w-1)H(\tau+\sigma+1)H(v)H(w-1)H(\tau)H(\sigma+1)} \\ T' = \sum \left\{ \frac{2^{2u}H(v)H(\sigma+1)}{H(v-u)H(\sigma-u+1)H(2u-1)H(1)} \right. \\ \left. + \frac{2^{2u}H(v)H(w-1)H(\tau)H(\sigma+1)}{H(v-u+1)H(\sigma-u+2)H(w-2)H(\tau-1)H(2u-3)H(3)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{2^{2u}H(v)H(w-1)H(\tau)H(\sigma+1)}{H(w-u+1)H(\tau-u+2)H(v-2)H(\sigma-1)H(2u-3)H(3)} \right. \\ \left. + \frac{2^{2u}H(v)H(w-1)H(\tau)H(\sigma+1)}{H(w-u)H(\tau-u+1)H(v-1)H(\sigma)H(2u-1)H(1)} \right\}$$

gesetzt wird. Die Summationen dieser Ausdrücke für T und T' müssen so ausgeführt werden wie am Ende des vor. Art. angeführt wurde. Man sieht hieraus leicht, dass in Bezug auf T die Summation sich, wenn

$$\sigma < v$$

im ersten Gliede von $u = 0$ bis $u = \sigma$

- zweiten — - $u = 1$ - $u = \sigma + 1$

- dritten — - $u = 2$ - $u = \sigma + 2$

u. s. w.

und wenn

$$\sigma > v$$

im ersten Gliede von $u = 0$ bis $u = v$

- zweiten — - $u = 1$ - $u = v + 1$

- dritten — - $u = 2$ - $u = v + 2$

u. s. w.

erstrecken muss. Betrachtet man den Ausdruck für T näher, so findet man, dass das letzte Glied mit dem ersten, das vorletzte mit dem zweiten, u. s. w. identisch wird, wenn man in jenen w in v , und τ in σ verwandelt, und es ist leicht einzusehen, dass dieses so sein muss. Man kann daher die Grenzen der Summation auch so ausdrücken. Sie erstreckt sich, wenn

$$\tau < w$$

im letzten Gliede von $u = 0$ bis $u = \tau$

- vorletzten — $u = 1$ - $u = \tau + 1$

u. s. w.

und wenn

$$\tau > w$$

im letzten Gliede von $u = 0$ bis $u = w$

- vorletzten — $u = 1$ - $u = w + 1$

u. s. w.

In Bezug auf die Summation des Ausdrucks für T' findet ein ganz analoges Verhalten statt.

20.

Um diese Ausdrücke für T und T' näher kennen zu lernen, ist es hinreichend die ersten Glieder derselben für

$$u = 0, u = 1, u = 2, \text{ etc.}$$

auszuschreiben. Erwägt man dass allgemein

$$\Pi(z + n) = (z + 1)(z + 2)(z + 3) \dots (z + n) \Pi(z)$$

ist, wenn n eine ganze und positive Zahl bezeichnet, so findet man leicht, dass

$$\begin{aligned}
T = & 1 + 2 \frac{v \cdot \sigma}{1 \cdot 1} + 2^2 \frac{v \cdot v - 1 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + 2^3 \frac{v \cdot v - 1 \cdot v - 2 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \\
& + 2 \frac{w \cdot \tau}{1 \cdot 1} + 2^2 \frac{w \cdot \tau}{1 \cdot 1} \cdot \frac{v \cdot \sigma}{1 \cdot 1} + 2^3 \frac{w \cdot \tau}{1 \cdot 1} \cdot \frac{v \cdot v - 1 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + \text{etc.} \\
& + 2^2 \frac{w \cdot w - 1 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + 2^3 \frac{w \cdot w - 1 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{v \cdot \sigma}{1 \cdot 1} + 2^4 \frac{w \cdot w - 1 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{v \cdot v - 1 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T' = & 2^2 v(\sigma + 1) + 2^3 v(\sigma + 1) \frac{v - 1 \cdot \sigma}{3 \cdot 1} + 2^4 v(\sigma + 1) \frac{v - 1 \cdot v - 2 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} + 2^5 v(\sigma + 1) \frac{v - 1 \cdot v - 2 \cdot v - 3 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \\
& + 2^3 v(\sigma + 1) \frac{w - 1 \cdot \tau}{3 \cdot 1} + 2^4 v(\sigma + 1) \frac{w - 1 \cdot \tau}{3 \cdot 1} \cdot \frac{v - 1 \cdot \sigma}{3 \cdot 1} + 2^5 v(\sigma + 1) \frac{w - 1 \cdot \tau}{3 \cdot 1} \cdot \frac{v - 1 \cdot v - 2 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} + \text{etc.} \\
& + 2^4 v(\sigma + 1) \frac{w - 1 \cdot w - 2 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} + 2^5 v(\sigma + 1) \frac{w - 1 \cdot w - 2 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{v - 1 \cdot \sigma}{3 \cdot 1} + 2^6 v(\sigma + 1) \frac{w - 1 \cdot w - 2 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{v - 1 \cdot v - 2 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} + \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

*) wo in beiden Richtungen die Glieder so weit fortgesetzt werden müssen, bis sie Null werden, welches stets der Fall ist, da v , w , τ und σ ganze und positive Zahlen sind. Die vorstehenden Ausdrücke folgen einem einfachen Gesetze, und man erkennt leicht daraus, dass T wie T' aus dem Product von zwei Factoren bestehen, von welchen der eine bloß Function von v und σ , und der andere bloß Function von w und τ ist. Der erste dieser Factoren in T' lässt sich überdies noch in zwei Factoren zerlegen. Setzt man nämlich

$$V = 1 + 2 \frac{v \cdot \sigma}{1 \cdot 1} + 2^2 \frac{v \cdot v - 1 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + 2^3 \frac{v \cdot v - 1 \cdot v - 2 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

$$W = 1 + 2 \frac{w \cdot \tau}{1 \cdot 1} + 2^2 \frac{w \cdot w - 1 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} + 2^3 \frac{w \cdot w - 1 \cdot w - 2 \cdot \tau \cdot \tau - 1 \cdot \tau - 2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

so ist

$$T = VW$$

und setzt man ferner

$$V' = 1 + 2 \frac{v - 1 \cdot \sigma}{3 \cdot 1} + 2^2 \frac{v - 1 \cdot v - 2 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} + 2^3 \frac{v - 1 \cdot v - 2 \cdot v - 3 \cdot \sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

$$W' = 1 + 2 \frac{w - 1 \cdot \tau}{3 \cdot 1} + 2^2 \frac{w - 1 \cdot w - 2 \cdot \tau \cdot \tau - 1}{3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} + 2^3 \frac{w - 1 \cdot w - 2 \cdot w - 3 \cdot \tau \cdot \tau - 1 \cdot \tau - 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

so wird

$$T' = 4v(\sigma + 1) V'W'$$

*) Ich bemerke hiezu, dass wenn man statt dieser die letzten Glieder von T und T' für $u = 0$, $u = 1$, etc. ausschreibt, man dieselben Ausdrücke bekommt, welches auch nicht anders sein kann.

21.

Die eben gefundenen Functionen V , W , V' und W' sind Gaussische hypergeometrische Reihen, in welchen das vierte Element gleich Eins ist. Vergleicht man sie nemlich mit der im § I. angeführten allgemeinen Form dieser Reihen, so findet man

 in V

$$\alpha = -v, \quad \beta = -\sigma, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

 in W

$$\alpha = -w, \quad \beta = -\tau, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad x = 1$$

 in V'

$$\alpha = -v + 1, \quad \beta = -\sigma, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \quad x = 1$$

 in W'

$$\alpha = -w + 1, \quad \beta = -\tau, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \quad x = 1$$

Da die beiden ersten Elemente dieser Reihen ganze und negative Zahlen sind, so kann man sie durch die Summationsformel (E) des Art. 7. summiren, und erhält dadurch unmittelbar

$$V = \frac{\Pi(-\frac{1}{2}) \Pi(v + \sigma - \frac{1}{2})}{\Pi(v - \frac{1}{2}) \Pi(\sigma - \frac{1}{2})}$$

$$W = \frac{\Pi(-\frac{1}{2}) \Pi(w + \tau - \frac{1}{2})}{\Pi(w - \frac{1}{2}) \Pi(\tau - \frac{1}{2})}$$

$$V' = \frac{\Pi(\frac{1}{2}) \Pi(v + \sigma - \frac{1}{2})}{\Pi(v - \frac{1}{2}) \Pi(\sigma + \frac{1}{2})}$$

$$W' = \frac{\Pi(\frac{1}{2}) \Pi(w + \tau - \frac{1}{2})}{\Pi(w - \frac{1}{2}) \Pi(\tau + \frac{1}{2})}$$

wo die Π Functionen in ihrer allgemeinen Bedeutung genommen werden müssen, aber durch die Reductionsformel

$$\Pi(z - \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2z} \frac{\Pi(2z)}{\Pi(z)}$$

wo π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, in solche verwandelt werden können, deren Argumente ganze und positive Zahlen, die Null eingeschlossen, sind. Es wird dadurch

$$V = \frac{\Pi(2v + 2\sigma) \Pi(v) \Pi(\sigma)}{\Pi(v + \sigma) \Pi(2v) \Pi(2\sigma)}$$

$$W = \frac{\Pi(2w + 2\tau) \Pi(w) \Pi(\tau)}{\Pi(w + \tau) \Pi(2w) \Pi(2\tau)}$$

$$V' = 2 \frac{\Pi(2v + 2\sigma) \Pi(v) \Pi(\sigma + 1)}{\Pi(v + \sigma) \Pi(2v) \Pi(2\sigma + 2)}$$

$$W' = 2 \frac{\Pi(2w + 2\tau) \Pi(w) \Pi(\tau + 1)}{\Pi(w + \tau) \Pi(2w) \Pi(2\tau + 2)}$$

Man kann diese Ausdrücke, so wie die des vorvor. Art. für K und K' noch vereinfachen. Aus der für ganze und positive Zahlen stattfindenden Formel

$$H(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z$$

folgt leicht die Reductionsformel

$$\frac{H(2z)}{H(z)} = 2^z \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2z - 1$$

Setzt man daher allgemein

$$\rho(z, z') = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2(z+z') - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2z \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2z'}$$

$$\pi(z, z') = \frac{2z+1 \cdot 2z+3 \cdot 2z+5 \dots 2(z+z') - 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2z' - 1}$$

und wegen $H(0) = 1$ ins Besondere

$$\rho(0,0) = 1, \quad \rho(0,z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2z - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2z}$$

$$\pi(0,0) = 1, \quad \pi(0,z) = 1$$

so wird

$$K = \rho(v, w) \cdot \rho(\tau, \sigma), \quad K' = \rho(v, w - 1) \cdot \rho(\tau, \sigma + 1)$$

$$V = \pi(v, \sigma), \quad V' = \frac{\pi(v, \sigma)}{2\sigma + 1}$$

$$W = \pi(w, \tau), \quad W' = \frac{\pi(w, \tau)}{2\tau + 1}$$

also

$$T = \pi(v, \sigma) \cdot \pi(w, \tau), \quad T' = \frac{4v(\sigma + 1)}{(2\sigma + 1)(2\tau + 1)} \pi(v, \sigma) \cdot \pi(w, \tau)$$

und wenn man diese in die (25) substituirt,

$$G(\tau, \sigma) = \rho(v, w) \cdot \rho(\tau, \sigma) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma)$$

$$H(\tau, \sigma) = \frac{4v(\sigma + 1)}{(2\sigma + 1)(2\tau + 1)} \rho(v, w - 1) \cdot \rho(\tau, \sigma + 1) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma)$$

womit die im Art. 18 angekündigte Aufgabe gelöst ist. In Bezug auf die ρ und π Functionen bemerke ich noch Folgendes. Dass

$$\rho(z, z') = \rho(z', z)$$

ist, oder dass man die beiden Argumente der ρ Functionen mit einander verwechseln darf, ist aus dem obigen Ausdruck dieser Function ohne Weiteres sichtbar, aber es ist auch stets

$$\pi(z, z') = \pi(z', z)$$

welches durch nähere Betrachtung des obigen Ausdrucks für diese Function leicht zu finden ist.

22.

Durch Hülfe der eben gefundenen Ausdrücke für die G und H Coefficienten giebt die Gleichung (21) sogleich

$$E(k, l) = \sum \varrho(v, w) \cdot \varrho(\tau, \sigma) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma) p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} \quad (26)$$

$$- \sum \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)} \varrho(v, w-1) \cdot \varrho(\tau, \sigma+1) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma) p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1}$$

Dieses ist der einfache und allgemeine analytische Ausdruck der Coefficienten der Entwicklung des Ausdrucks (15) von $\frac{r'}{\Delta}$ nach den Potenzen von α und β , und es lassen sich in demselben überdies noch die beiden Glieder in Eines zusammen ziehen, wie weiter unten gezeigt werden wird. Fürs Erste werde ich aber dieselben von einander abgesondert stehen lassen, weil ihre numerische Berechnung in dieser Gestalt Vortheile darbietet, die ich weiter unten näher erörtern werde. Für jedes paar gegebene Werthe von k und l müssen im ersten Gliede des vorstehenden Ausdrucks die Summationen sich

von $\tau = 0$ bis $\tau = k$

und von $\sigma = 0$ bis $\sigma = l$

hingegen im zweiten Gliede sich

von $\tau = 0$ bis $\tau = k - 1$

und von $\sigma = 0$ bis $\sigma = l - 1$

erstrecken. Die Summe der Glieder, die mit $\alpha^k \beta^l$ multiplicirt sind, ist also

$$= (k+1)(l+1) + kl$$

und das erste Glied dieses Ausdrucks giebt die Summe der positiven, das zweite Glied dagegen die Summe der negativen Glieder an. Ich bemerke noch, dass in Folge des Art. 17 stets

$$v = k - \tau, w = l - \sigma$$

ist.

Ehe ich weiter gehe, wird es wohl nicht undienlich sein zur Erläuterung des obigen Ausdrucks ihn für ein paar bestimmte Werthe von k und l vollständig auszuschreiben. Sei $k = 2$ und $l = 3$, dann wird zufolge desselben der Coefficient von $\alpha^2 \beta^3$ in $\frac{r'}{\Delta} =$

$$\begin{aligned}
E(2,3) = & \varrho(2,3) \cdot \varrho(0,0) \cdot \pi(2,0) \cdot \pi(3,0) p^2 q^3 - 4 \frac{2.4}{1.1} \varrho(2,2) \cdot \varrho(0,1) \cdot \pi(3,0) \cdot \pi(2,0) p q^2 \\
& + \varrho(2,2) \cdot \varrho(0,1) \cdot \pi(2,1) \cdot \pi(2,0) p^2 q - 4 \frac{2.2}{3.1} \varrho(2,1) \cdot \varrho(0,2) \cdot \pi(2,0) \cdot \pi(2,1) p q^0 \\
& + \varrho(2,1) \cdot \varrho(0,2) \cdot \pi(2,2) \cdot \pi(1,0) p^2 q^{-1} - 4 \frac{2.3}{5.1} \varrho(2,0) \cdot \varrho(0,3) \cdot \pi(1,0) \cdot \pi(2,2) p q^{-2} \\
& + \varrho(2,0) \cdot \varrho(0,3) \cdot \pi(2,3) \cdot \pi(0,0) p^2 q^{-3} - 4 \frac{4.1}{1.3} \varrho(1,2) \cdot \varrho(1,1) \cdot \pi(3,1) \cdot \pi(1,0) p^{-1} q^2 \\
& + \varrho(1,3) \cdot \varrho(1,0) \cdot \pi(1,0) \cdot \pi(3,1) p^0 q^3 - 4 \frac{4.2}{3.3} \varrho(1,1) \cdot \varrho(1,2) \cdot \pi(2,1) \cdot \pi(1,1) p^{-1} q^0 \\
& + \varrho(1,2) \cdot \varrho(1,1) \cdot \pi(1,1) \cdot \pi(2,1) p^0 q - 4 \frac{4.3}{5.3} \varrho(1,0) \cdot \varrho(1,3) \cdot \pi(1,1) \cdot \pi(1,2) p^{-1} q^{-2} \\
& + \varrho(1,1) \cdot \varrho(2,1) \cdot \pi(1,2) \cdot \pi(1,1) p^0 q^{-1} \\
& + \varrho(1,0) \cdot \varrho(1,3) \cdot \pi(1,3) \cdot \pi(1,0) p^0 q^{-3} \\
& + \varrho(0,3) \cdot \varrho(2,0) \cdot \pi(0,0) \cdot \pi(3,2) p^{-2} q^3 \\
& + \varrho(0,2) \cdot \varrho(2,1) \cdot \pi(0,1) \cdot \pi(2,2) p^{-2} q \\
& + \varrho(0,1) \cdot \varrho(2,2) \cdot \pi(0,2) \cdot \pi(1,2) p^{-2} q^{-1} \\
& + \varrho(0,0) \cdot \varrho(2,3) \cdot \pi(0,3) \cdot \pi(0,2) p^{-2} q^{-3}
\end{aligned}$$

In den positiven Gliedern dieses Ausdrucks erkennt man sogleich, dass die Coefficienten der negativen Potenzen von p und q denen der bezüglichen positiven gleich sind, aber in den negativen Gliedern tritt diese Eigenschaft erst nach der Substitution der numerischen Werthe der Coefficienten hervor. Es wird dadurch

$$\begin{aligned}
E(2,3) = & \frac{1.3.5.7.9}{2.4.2.4.6} p^2 q^3 - 4 \frac{2.4.1.3.5.7.1}{1.1.2.4.2.4.2} p q^2 \\
& + \frac{1.3.5.7.1.5}{2.4.2.4.2.1} p^2 q - 4 \frac{2.2.1.3.5.1.3.5}{3.1.2.4.2.2.4.1} p q^0 \\
& + \frac{1.3.5.1.3.5.7}{2.4.2.2.4.1.3} p^2 q^{-1} - 4 \frac{2.3.1.3.1.3.5.5.7}{5.1.2.4.2.4.6.1.3} p q^{-2} \\
& + \frac{1.3.1.3.5.5.7.9}{2.4.2.4.6.1.3.5} p^2 q^{-3} - 4 \frac{1.1.1.3.5.1.3.7}{1.3.2.2.4.2.2.1} p^{-1} q^2 \\
& + \frac{1.3.5.7.1.7}{2.2.4.6.2.1} p^0 q^3 - 4 \frac{1.2.1.3.1.3.5.5.3}{3.3.2.2.2.2.4.1.1} p^{-1} q^0 \\
& + \frac{1.3.5.1.3.3.5}{2.2.4.2.2.1.1} p^0 q - 4 \frac{1.3.1.1.3.5.7.3.3.5}{5.3.2.2.2.4.6.1.1.3} p^{-1} q^{-2} \\
& + \frac{1.3.1.3.5.5.3}{2.2.2.2.4.1.1} p^0 q^{-1} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo in den negativen Gliedern die eben genannte Eigenschaft leicht zu erkennen ist. Der Uebergang zum Reellen kostet keine Mühe, wenn man sich erinnert, dass

$$p^m q^{m'} + \frac{1}{p^m q^{m'}} = 2 \cos \{ m (U' - U) + m' (U' + U) \}$$

ist. Man braucht also nur, ohne Rücksicht auf die entgegengesetzten Glieder zu nehmen,

$2 \cos \{ (m + m') U' - (m - m') U \}$ für $p^m q^{m'}$ zu setzen; bei den mit $p^0 q^0$ multiplicirten Gliedern, oder mit andern Worten bei den Gliedern, welche die imaginären Exponentialfunctionen nicht enthalten, fällt die Multiplication mit 2 weg. Der obige Ausdruck wird daher, wenn man zum Reellen übergeht,

$$\begin{aligned} E(2,3) = & 2 \frac{1.3.5.7.9}{2.4.2.4.6} \cos(5U' + U) - 8 \frac{2.3.5.7.1}{2.4.2.4.2} \cos(3U' + U) \\ & + 2 \frac{1.3.5.7.5}{2.4.2.4.2} \cos(3U' - U) - 8 \frac{2.2.3.5.3.5}{3.2.4.2.2.4} \cos(U' - U) \\ & + 2 \frac{1.3.5.3.5.7}{2.4.2.2.4.3} \cos(U' - 3U) - 8 \frac{2.3.3.3.5.5.7}{5.2.4.2.4.6.3} \cos(U' + 3U) \\ & + 2 \frac{1.3.3.5.5.7.9}{2.4.2.4.6.3.5} \cos(U' + 5U) \\ & + 2 \frac{1.3.5.7.7}{2.2.4.6.2} \cos(3U' + 3U) \\ & + 2 \frac{3.5.3.3.5}{2.2.4.2.2} \cos(U' + U) \end{aligned}$$

23.

Bevor ich zu den Coefficienten der Potenzen von r und r' übergehe, will ich statt der zu $U' - U$ und $U' + U$ gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen die zu U' und U gehörigen einführen. Sei

$$2 \cos U = u + \frac{1}{u}, \quad 2 \cos U' = u' + \frac{1}{u'}$$

dann erhalten wir folgende Relationen

$$p = \frac{u'}{u}, \quad q = uu'$$

hieraus, und wenn wir wie oben $k + l = n$ setzen, ergibt sich

$$p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} = u'^{n-2\tau-2\sigma} u^{-(n-2l-2\tau+2\sigma)}$$

$$p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1} = u'^{n-2\tau-2\sigma-2} u^{-(n-2l-2\tau+2\sigma)}$$

Setzen wir nun

$$\tau + \sigma = f, \quad l + \tau - \sigma = f + g$$

so gehen in den Ausdruck (26) die Exponentialfunctionen über in

$$u'^{n-2f} u^{-(n-2f-2g)} \quad \text{und} \quad u'^{n-2f-2} u^{-(n-2f-2g)}$$

aber da dieser Ausdruck reel sein muss, so darf man dafür auch

$$u'^{-(n-2f)} u^{n-2f-2g} \quad \text{und} \quad u'^{-(n-2f-2)} u^{n-2f-2g}$$

schreiben. Da ferner Δ^2 eine symmetrische Function von U und U' ist, so darf man auch in diesen Exponentialfunctionen u' und u mit einander verwechseln, und also

$$u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)} \text{ und } u^{n-2f-2} u'^{-(n-2f-2g)}$$

in dem Ausdruck (26) schreiben, ohne in den Coefficienten derselben eine Aenderung vornehmen zu müssen. Es wird daher, wenn man auch k eliminirt,

$$(27) \quad E(n-l, l) = \sum \varrho(v, w) \cdot \varrho(\tau, \sigma) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma) u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)} \\ - \sum \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)} \varrho(v, w-1) \cdot \varrho(\tau, \sigma+1) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma) u^{n-2f-2} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo

$$f = \tau + \sigma, \quad g = l - 2\sigma \\ v = n - l - \tau, \quad w = l - \sigma$$

gesetzt werden muss.

24.

Es ist schon im Art. 16. gezeigt worden, dass man den Coefficienten von $\left(\frac{r}{r'}\right)^n$ durch die Summation der Coefficienten von $\alpha^{n-l} \beta^l$, deren Ausdruck eben ermittelt worden ist, erhält, wenn man bei dieser Summation n unveränderlich annimmt. Diese Summation soll jetzt ausgeführt werden. Setzt man

$$\frac{r'}{\Delta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} D_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

so ist D_n der Coefficient, dessen Ausdruck durch die bez. Summation der E Coefficienten ermittelt werden muss. Der Ausdruck (27) dieser Coefficienten giebt aber leicht zu erkennen, dass D_n folgende Form haben muss,

$$D_n = \sum C(n-2f, -(n-2f-2g)) \cdot u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo die eine Summation sich

$$\text{von } f = 0 \text{ bis } f = n$$

und die andere sich

$$\text{von } g = -f \text{ bis } g = n - f$$

erstrecken muss. Aber da Δ reel ist, so ist nothwendig, wenn m und m' irgend zwei Indices bezeichnen,

$$C(m, m') = C(-m, -m')$$

und da Δ in Bezug auf U und U' symmetrisch ist, so muss auch

$$C(m, m') = C(m', m)$$

sein. Man braucht also in der That die Summation,

wenn n eine grade Zahl ist,
 nur von $f = 0$ bis $f = \frac{1}{2}n$
 und von $g = 0$ bis $g = n - 2f$,
 und wenn n eine ungrade Zahl ist,
 nur von $f = 0$ bis $f = \frac{n-1}{2}$
 und von $g = 0$ bis $g = n - 2f$

auszudehnen, um alle Glieder von D_n zu erhalten, deren Coefficienten einander nicht gleich sein müssen.

Es ist nun zunächst der Ausdruck der C Coefficienten zu entwickeln. Da einestheils

$$\frac{r'}{\Delta} = \sum E(n-l, l) \alpha^{n-l} \beta^l$$

und andernteils

$$\frac{r'}{\Delta} = \sum D_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

ist, so ergibt sich, wenn man die Werthe

$$\alpha = \frac{r}{r'} \cos 2\frac{1}{2}J, \quad \beta = \frac{r}{r'} \sin 2\frac{1}{2}J$$

substituiert,

$$D_n = \sum E(n-l, l) \cdot \cos^{2n} \frac{1}{2}J \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2}J$$

und wenn man (27) substituiert,

$$D_n = \cos^{2n} \frac{1}{2}J \sum \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2}J \{P u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)} - P' u^{n-2f-2} u'^{-(n-2f-2g)}\}$$

wo zur Abkürzung

$$P = \varrho(v, w) \cdot \varrho(\tau, \sigma) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma)$$

$$P' = \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)} \varrho(v, w-1) \cdot \varrho(\tau, \sigma+1) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma)$$

geschrieben ist. Um hieraus den Ausdruck der C Coefficienten zu erhalten, ist nichts weiter zu thun, wie den Exponenten von u im zweiten Gliede dem im ersten Gliede gleich zu machen. Dieses bewirkt man, indem man im zweiten Gliede $f-1$ statt f , und $g+1$ statt g

schreibt. Erwägt man dass hieraus vermöge der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} f &= \tau + \sigma, & g &= l - 2\sigma \\ v &= n - l - \tau, & w &= l - \sigma \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

die gleichzeitige Verwandlung von

$$l \text{ in } l+1$$

$$\tau \text{ in } \tau-1$$

$$w \text{ in } w+1$$

bedingt wird, während v und σ unverändert bleiben, so bekommt man sogleich

$$C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = \cos^{2n\frac{1}{2}} J \sum \operatorname{tg}^{2l\frac{1}{2}} J \{P - Q \operatorname{tg}^{2\frac{1}{2}} J\}$$

wo P denselben Werth wie oben hat, aber

$$Q = \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau-1)} \varrho(v, w) \cdot \varrho(\tau-1, \sigma+1) \cdot \pi(w+1, \tau-1) \cdot \pi(v, \sigma)$$

ist. Da in jedem C Coefficienten ausser n auch f und g feste und unveränderliche Werthe haben, so hängt der vorstehende Ausdruck nur von einer einfachen Summation in Bezug auf σ ab. Um dieses hervorzuheben ziehe ich aus den Gleichungen (28) durch die Elimination die folgenden

$$v = n - f - g - \sigma$$

$$w = g + \sigma$$

$$\tau = f - \sigma$$

$$l = g + 2\sigma$$

substituirt man diese, so ergibt sich schliesslich

$$(29) \quad C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = \cos^{2n\frac{1}{2}} J \operatorname{tg}^{2g\frac{1}{2}} J \sum \{P \operatorname{tg}^{4\sigma\frac{1}{2}} J - Q \operatorname{tg}^{4\sigma+2\frac{1}{2}} J\}$$

wo

$$P = \varrho(n - f - g - \sigma, g + \sigma) \cdot \varrho(f - \sigma, \sigma) \cdot \pi(n - f - g - \sigma, \sigma) \cdot \pi(g + \sigma, f - \sigma)$$

$$Q = \frac{4(n - f - g - \sigma)(\sigma + 1)}{(2f - 2\sigma - 1)(2\sigma + 1)} \varrho(n - f - g - \sigma, g + \sigma) \cdot \varrho(f - \sigma - 1, \sigma + 1) \cdot \pi(n - f - g - \sigma, \sigma) \cdot \pi(g + \sigma + 1, f - \sigma - 1)$$

ist, und die Summation im ersten Gliede

$$\text{von } \sigma = 0 \text{ bis } \sigma = f$$

hingegen im zweiten Gliede

$$\text{von } \sigma = 0 \text{ bis } \sigma = f - 1$$

ausgedehnt werden muss.

25.

Die Coefficienten in der Gruppe der C Coefficienten, die denselben Werthen von n und f angehören, besitzen die Eigenschaft, dass sie sich wiederholen, so dass der erste dem letzten, der zweite dem vorletzten, u. s. w. gleich ist. Um dieses zu beweisen schreibe ich den eben gefundenen Ausdruck wie folgt

$$C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = \cos^{2n\frac{1}{2}} J \operatorname{tg}^{2g\frac{1}{2}} J \left\{ \begin{aligned} &a(g, 0) + a(g, 1) \operatorname{tg}^{4\frac{1}{2}} J + a(g, 2) \operatorname{tg}^{8\frac{1}{2}} J + \dots + a(g, f) \operatorname{tg}^{4f\frac{1}{2}} J \\ &- b(g, 0) \operatorname{tg}^{2\frac{1}{2}} J - b(g, 1) \operatorname{tg}^{6\frac{1}{2}} J - \dots - b(g, f - 1) \operatorname{tg}^{4f-2\frac{1}{2}} J \end{aligned} \right\}$$

wo also $a(g, 0)$, $a(g, 1)$, etc. $b(g, 0)$, etc. positive Zahlen, und specielle Werthe der oben mit P und Q bezeichneten Coefficienten sind. Ich mache nun darauf aufmerksam, dass der ursprüngliche Ausdruck für Δ^2 seinen Werth nicht ändert, wenn man darin $180^\circ - J$ für J , und $-U'$ für U' schreibt, und dass daher dieselbe Eigenschaft auch in der Entwicklung von $\frac{1}{\Delta}$ statt finden muss. Setzt man daher in dem vorstehenden Ausdruck der C Coefficienten

$$180^\circ - J \text{ statt } J, \text{ und } n - 2f - g \text{ statt } g$$

so darf er seinen Werth nicht ändern, denn vermöge der zweiten Substitution geht $-(n - 2f - 2g)$ in $+(n - 2f - 2g)$

über. Es entsteht hiedurch

$$C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = \sin^{2n-\frac{1}{2}} J \cotg^{2(n-2f-g)-\frac{1}{2}} J \left\{ \begin{aligned} &a(n-2f-g, 0) + a(n-2f-g, 1) \cotg^{\frac{1}{2}} J + \dots + a(n-2f-g, f) \cotg^{\frac{f-1}{2}} J \\ &- b(n-2f-g, 0) \cotg^{\frac{1}{2}} J - b(n-2f-g, 1) \cotg^{\frac{3}{2}} J - \dots - b(n-2f-g, f-1) \cotg^{\frac{f-2}{2}} J \end{aligned} \right\}$$

Vergleicht man die gleichartigen Glieder dieser beiden Ausdrücke der C Coefficienten mit einander, so erhält man

$$\begin{aligned} a(n-2f-g, f) &= a(g, 0) & , & & b(n-2f-g, f-1) &= b(g, 0) \\ a(n-2f-g, f-1) &= a(g, 1) & , & & b(n-2f-g, f-2) &= b(g, 1) \\ &\text{etc.} & & & &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(n-2f-g, 1) &= a(g, f-1) & , & & b(n-2f-g, 1) &= b(g, f-2) \\ a(n-2f-g, 0) &= a(g, f) & , & & b(n-2f-g, 0) &= b(g, f-1) \end{aligned}$$

Jeder a und b Coefficient kommt also zweimal vor, wenn nicht die Anzahl der einen oder andern derselben ungrade ist, in welchem Falle der mittlere derselben nur Einmal vorhanden ist. Man kann, wie ich gleich zeigen werde, durch diese Eigenschaft bei der numerischen Berechnung dieser Coefficienten eine vollständige Controlle ihrer Richtigkeit erhalten.

26.

Da die a und b Coefficienten unabhängig von den Elementen der Bahnen der Himmelskörper sind, und daher in jedem Falle dieselben bleiben, so habe ich sie bis zu $n = 20$ berechnet, und in der Tafel IV dieser Abhandlung angehängt. Ich habe bis zu dieser Grenze alle Coefficienten berechnet, obgleich man meistentheils nicht alle einer jeden Abtheilung braucht. Ich meine dass man für die neuen Planeten hiemit

ausreichen wird, und sollten einzelne Fälle vorkommen, in welchen man sie für einige Werthe mehr von n bedürfte, so habe ich die weitere Berechnung derselben dadurch zu erleichtern gesucht, dass ich die Tafeln I und II für $\varrho(z, z')$ und $\pi(z, z')$ etwas weiter ausgedehnt habe.

Nicht alle Coefficienten sind nach den obigen Formeln direct berechnet worden, sondern dieses hat nur für die positiven Glieder statt gefunden. In so weit nämlich diese, dem eben bewiesenen Satze zufolge, einander nicht gleich sein müssen, wurde der Ausdruck für P oder

$$(30) \quad a(g, \sigma) = \varrho(n-f-g-\sigma, g+\sigma) \cdot \varrho(f-\sigma, \sigma) \cdot \pi(n-f-g-\sigma, \sigma) \cdot \pi(g+\sigma, f-\sigma)$$

angewandt. Die Berechnung der negativen Glieder oder der b Coefficienten wurde dadurch bewerkstelligt, dass ich den Factor suchte, mit welchem man den nächstvorhergehenden a Coefficienten multipliciren muss, um den b Coefficienten zu erhalten. Es ist dem Vorhergehenden zufolge Q oder

$$b(g, \sigma) = \frac{4(n-f-g-\sigma)(\sigma+1)}{(2f-2\sigma-1)(2\sigma+1)} \varrho(n-f-g-\sigma, g+\sigma) \cdot \varrho(f-\sigma-1, \sigma+1) \cdot \pi(n-f-g-\sigma, \sigma) \cdot \pi(g+\sigma+1, f-\sigma-1)$$

Aber aus den Ausdrücken des Art. 24 für die ϱ und π Functionen findet man leicht die Relationen

$$\begin{aligned} \varrho(z-1, z'+1) &= \frac{z}{z'+1} \varrho(z, z') \\ \pi(z+1, z'-1) &= \frac{2z'-1}{2z+1} \pi(z, z') \end{aligned}$$

Wendet man diese auf den vorstehenden Ausdruck an, so findet man

$$(31) \quad b(g, \sigma) = (n-f-g-\sigma) \cdot \lambda(g, \sigma) \cdot a(g, \sigma)$$

wo

$$(32) \quad \lambda(g, \sigma) = \frac{4(f-\sigma)}{(2g+2\sigma+1)(2\sigma+1)}$$

und also von n unabhängig ist. Diese Art der Berechnung der b Coefficienten ist nicht nur einfacher wie die directe, sondern sie bietet auch eine vollständige Controlle über die Richtigkeit aller berechneten Coefficienten dar. Schreibt man nemlich

$$n-2f-g \text{ statt } g, \text{ und } f-\sigma-1 \text{ statt } \sigma$$

in (31), so entsteht

$$b(n-2f-g, f-\sigma-1) = (g+\sigma+1) \cdot \lambda(n-2f-g, f-\sigma-1) \cdot a(n-2f-g, f-\sigma-1)$$

aber die im vor. Art. zwischen den a und b Coefficienten entwickelten Relationen haben den allgemeinen Ausdruck

$$(33) \quad \begin{cases} a(g, \sigma) = a(n-2f-g, f-\sigma) \\ b(g, \sigma) = b(n-2f-g, f-\sigma-1) \end{cases}$$

die vorhergehende Gleichung wird dadurch

$$b(g, \sigma) = (g + \sigma + 1) \cdot \lambda(g', \sigma') \cdot a(g, \sigma + 1) \quad (34)$$

wo

$$g' = n - 2f - g, \quad \sigma' = f - \sigma - 1$$

ist. Dieser Ausdruck macht jeden b Coefficienten von dem zunächst nachfolgenden a Coefficienten abhängig, während (34) denselben aus dem zunächst vorhergehenden giebt.

Der Coefficient $\lambda(g', \sigma')$ wird aus (32) berechnet, nachdem man darin die numerischen Werthe von g' und σ' statt der von g und σ substituirt hat.

Hat man nun einmal alle a Coefficienten, die einander nicht gleich sind, durch (30) berechnet, und rechnet dann die b Coefficienten erst durch (34), und dann durch (34), dann ist die Berechnung aller Coefficienten controllirt. Man braucht sich bei der Anwendung dieser Controlle nicht speciel um (34) zu bekümmern, denn wenn man bei gegebenen Werthen von n und f durch successive Veränderung der Werthe von g und σ fortfährt alle Coefficienten zu berechnen, so wird man von selbst auf (34) hingeführt. Z. B. für $n = 9$ und $f = 2$ bekommt man, wenn man $g = 1$ und $\sigma = 0$ setzt,

$$b(1, 0) = 6 \cdot \lambda(1, 0) \cdot a(1, 0); \quad \lambda(1, 0) = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3}$$

woraus der Werth von $b(1, 0)$ folgt, nachdem $a(1, 0)$ aus (30) berechnet worden ist. Im weiteren Verlaufe der Berechnung der Coefficienten für $n = 9$ und $f = 2$ kommt man auch auf die Werthe $g = 4$ und $\sigma = 1$, und hiemit geben (34) und (32)

$$b(4, 1) = 2 \cdot \lambda(4, 1) \cdot a(4, 1); \quad \lambda(4, 1) = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3}$$

Für dieselben Werthe von n und f zeigen (33) aber, dass

$$b(4, 1) = b(1, 0)$$

$$a(4, 1) = a(1, 1)$$

es wird also

$$b(1, 0) = 2 \cdot \lambda(4, 1) \cdot a(1, 1)$$

welche Gleichung den Werth von $b(1, 0)$ durch $a(1, 1)$ giebt, und mit (34) offenbar übereinstimmt, wenn man darin ausser den obigen Werthen von n und f , $g = 1$ und $\sigma = 0$ setzt. Aus (30) ergiebt sich für unser Beispiel

$$a(1, 0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 12 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5}{4}$$

$$a(1, 1) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 10 \cdot 2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{4}$$

Wenn man nun bei der Berechnung des Logarithmus eines dieser Coefficienten, oder bei der Berechnung des von $\lambda(1,0)$ oder $\lambda(4,1)$ Fehler gemacht hat, so zeigen diese sich durch die Nichtübereinstimmung des durch die beiden vorstehenden Gleichungen doppelt berechneten Werthes von $b(1,0)$.

27.

Der im Vorhergehenden für die C Coefficienten gefundene, allgemeine Ausdruck (29) gilt für jeden Werth der Neigung J , und da man diese immer so wählen kann, dass sie nicht grösser wie 90° ist, so folgt, dass $\operatorname{tg} \frac{1}{2}J$ nie grösser wie Eins werden kann. Wenn aber J eine gewisse Grösse übersteigt, dann wird die Berechnung der C Coefficienten durch diesen Ausdruck sehr beschwerlich, weil für grosse Werthe von n die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}J$ sehr gross werden, und die C Coefficienten schliesslich von kleinen Differenzen grosser Zahlen abhängen. Ich habe mich durch Versuche davon überzeugt, dass man für eine Neigung wie die der Pallasbahn — ungefähr 35° — sich noch immer des genannten Ausdrucks bedienen kann, wenn man nur die Coefficienten für die grössten Werthe von n mit Logarithmen von sieben Stellen berechnet, und da in unserm Planetensystem bis jetzt keine grösseren Neigungen bekannt sind, so könnte ich es bei dem Ausdruck (29) bewenden lassen. Allein da man nicht wissen kann, welche Neigungen uns noch in der Folge bekannt werden, so will ich dem genannten Ausdruck auch andere Formen geben, die bei grösseren Neigungen besser zur Anwendung dienen können.

Führt man statt der ϱ und π Functionen die II Functionen wieder ein, so wird der Theil des Ausdrucks (29) von $C(n-2f, -(n-2f-2g))$, welcher innerhalb der Klammern steht =

$$\frac{II(2n-2f) II(2f) II(2n-2f-2g) II(2f+2g)}{2^{2n} II(n-f) II(f) II(n-f-g) II(f+g)} \\ \times \sum \left\{ \frac{\operatorname{tg}^{4\sigma} \frac{1}{2}J}{II(2n-2f-2g-2\sigma) II(2\sigma) II(2g+2\sigma) II(2f-2\sigma)} \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{tg}^{4\sigma+2} \frac{1}{2}J}{II(2n-2f-2g-2\sigma-1) II(2\sigma+1) II(2g+2\sigma+1) II(2f-2\sigma-1)} \right\}$$

Wenn man hierin σ statt 2σ schreibt, so bekommt man

$$C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = \frac{H(2n - 2f) H(2f) H(2n - 2f - 2g) H(2f + 2g)}{2^{2n} H(n - f) H(f) H(n - f - g) H(f + g)} \\ \times \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \sum_{\sigma=0}^{2f} (-1)^{\sigma} \frac{\operatorname{tg}^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{H(2n - 2f - 2g - \sigma) H(\sigma) H(2g + \sigma) H(2f - \sigma)}$$

Die Grösse unter dem Summenzeichen in diesem Ausdruck ist wieder eine hypergeometrische Reihe von der Gattung, die im § I. betrachtet wurde. Schreibt man nemlich die ersten Glieder derselben aus, so findet sich

$$\sum (-1)^{\sigma} \frac{\operatorname{tg}^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{H(2n - 2f - 2g - \sigma) H(\sigma) H(2g + \sigma) H(2f - \sigma)} = \frac{1}{H(2n - 2f - 2g) H(2g) H(2f)} \left\{ 1 - \frac{2n - 2f - 2g \cdot 2f}{1 \cdot 2g + 1} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J + \frac{2n - 2f - 2g \cdot 2n - 2f - 2g - 1 \cdot 2f \cdot 2f - 1}{1 \cdot 2 \cdot 2g + 1 \cdot 2g + 2} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} J + \text{etc.} \right\}$$

Es wird daher

$$C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = H \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \cdot F(-(2n - 2f - 2g), -2f, 2g + 1, -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J) \quad (36)$$

wenn man zur Abkürzung

$$H = \frac{H(2n - 2f) H(2f + 2g)}{2^{2n} H(n - f) H(f) H(n - f - g) H(f + g) H(2g)}$$

setzt. Mit dieser F Function kann man viele Verwandlungen vornehmen.

28.

Setzt man

$$\frac{\cos J}{\cos^2 \frac{1}{2} J} = z$$

so ist z eine Function, deren Maximum $= 1$ für $J = 0$ wird, und die Null wird, wenn $J = 90^\circ$ ist. Sie ist wegen dieser Eigenschaften in den Fällen, wo J gross ist, zur Anwendung geeignet. Es ist nun

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J = 1 - z$$

also

$$\operatorname{tg}^{2\sigma} \frac{1}{2} J = (1 - z)^{\sigma} = \sum_{p=0}^{\sigma} (-1)^p \frac{H(\sigma)}{H(p) H(\sigma - p)} z^p$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (35), so wird

$$(-1)^{\sigma} \frac{\operatorname{tg}^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{H(2n - 2f - 2g - \sigma) H(\sigma) H(2g + \sigma) H(2f - \sigma)} = \sum_{\sigma=p}^{2f} (-1)^{\sigma+p} \frac{z^p}{H(2n - 2f - 2g - \sigma) H(2g + \sigma) H(2f - \sigma) H(p) H(\sigma - p)} \\ = \frac{z^p}{H(2n - 2f - 2g - p) H(2g + p) H(2f - p) H(p)} \\ \times \left\{ 1 - \frac{2n - 2f - 2g - p \cdot 2f - p}{1 \cdot 2g + p + 1} + \frac{2n - 2f - 2g - p \cdot 2n - 2f - 2g - p - 1 \cdot 2f - p \cdot 2f - p - 1}{1 \cdot 2 \cdot 2g + p + 1 \cdot 2g + p + 2} + \text{etc.} \right\} \\ = \frac{z^p}{H(2n - 2f - 2g - p) H(2g + p) H(2f - p) H(p)} \cdot F(-(2n - 2f - 2g - p), -(2f - p), 2g + p + 1, -1)$$

Diese F Function gehört der Gattung an, deren Summe unter andern im § I. gegeben wurde. Durch die Ausdrücke (11) und (12) ergibt sich

$$F(-(2n-2f-2g-p), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = (-1)^p \frac{\Pi(2g+p) \Pi(2f-p)}{\Pi(2f+2g)} a_{2f-p}$$

wo

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (2n - 4f - 4g - p)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (2n - 4f - 4g - p) a_1 - \frac{1}{2} (2n - p) a_0$$

etc.

oder, wenn man die Elemente α und β der F Function mit einander vertauscht,

$$F(-(2n-2f-2g-p), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = (-1)^p \frac{\Pi(2g+p) \Pi(2n-2f-2g-p)}{\Pi(2n-2f)} a'_{2n-2f-2g-p}$$

wo

$$a'_0 = 1$$

$$a'_1 = -(2n - 4f + p)$$

$$a'_2 = -\frac{1}{2} (2n - 4f + p) a'_1 - \frac{1}{2} (2n - p) a'_0$$

etc.

ist. Substituirt man diese Ausdrücke in (35), so entsteht

$$\begin{aligned} C(n-2f, -(n-2f-2g)) &= \frac{\Pi(2n-2f) \Pi(2f)}{2^{2n} \Pi(n-f) \Pi(f) \Pi(n-f-g) \Pi(f+g)} \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \\ &\times \sum_{p=0}^{2f} (-1)^p B(2n-2f-2g, p) a_{2f-p} z^p \\ &= \frac{\Pi(2n-2f-2g) \Pi(2f+2g)}{2^{2n} \Pi(n-f) \Pi(f) \Pi(n-f-g) \Pi(f+g)} \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \\ &\times \sum_{p=0}^{2f} (-1)^p B(2f, p) a'_{2n-2f-2g-p} z^p \end{aligned}$$

wo $B(m, p)$ den p^{ten} Binomialcoefficienten der m^{ten} Potenz bedeutet. Diese Ausdrücke geben die C Coefficienten nach den Potenzen von z geordnet, allein man kann noch andere geben, die deshalb zweckmässiger sind wie die vorstehenden, weil sie auf kleinere Coefficienten der Potenzen der Function von J , die sie enthalten, hinführen.

29.

Wenden wir zuerst die Verwandlungsformel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1})$$

auf (36) an, dann wird

$$(37) \quad F(-(2n-2f-2g), -2f, 2g+1, -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J) = \cos^{-4n+4f+4g} \frac{1}{2} J. F(-(2n-2f-2g), 2f+2g+1, 2g+1, \sin^2 \frac{1}{2} J)$$

und wenn man die F Function rechter Hand als eine Summe von $2n - 2f - 2g$ Gliedern darstellt, so erhält man

$$F(- (2n - 2f - 2g), 2f + 2g + 1, 2g + 1, \sin^2 \frac{1}{2} J) = \frac{H(2n - 2f - 2g) H(2g)}{H(2f + 2g)} \sum (-1)^\sigma \frac{H(2f + 2g + \sigma) \sin^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{H(2n - 2f - 2g - \sigma) H(2g + \sigma) H(\sigma)}$$

wo σ von Null bis $2n - 2f - 2g$ ausgedehnt werden muss. Es ist aber

$$\sin^{2\sigma} \frac{1}{2} J = \sum_{p=0}^{\sigma} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{H(\sigma)}{H(\sigma - p) H(p)} \cos^p J \quad (38)$$

und wenn man diesen Ausdruck substituirt, wird

$$\sum_{p=0}^{2n-2f-2g} (-1)^\sigma \frac{H(2f + 2g + \sigma) \sin^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{H(2n - 2f - 2g - \sigma) H(2g + \sigma) H(\sigma)} = \sum_{p=0}^{2n-2f-2g} \frac{H(2f + 2g + p) \cos^p J}{2^p H(2n - 2f - 2g - p) H(2g + p) H(p)} F(-(2n - 2f - 2g - p), 2f + 2g + p + 1, 2g + p + 1, \frac{1}{2})$$

Durch Hülfe der oben angeführten Verwandelungsformel ergibt sich aber folgende Gleichung

$$F(-(2n - 2f - 2g - p), 2f + 2g + p + 1, 2g + p + 1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2n-2f-2g-p}} F(-(2n - 2f - 2g - p), -2f, 2g + p + 1, -1)$$

und die F Function rechter Hand kann wieder durch die Ausdrücke (11) und (12) summirt werden. Es wird durch diese

$$F(-(2n - 2f - 2g - p), -2f, 2g + p + 1, -1) = \frac{H(2g + p) H(2f)}{H(2f + 2g + p)} a_{2f}$$

wo

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (2n - 4f - 4g - 2p)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (2n - 4f - 4g - 2p) a_1 - \frac{1}{2} 2n$$

etc.

oder

$$F(-(2n - 2f - 2g - p), -2f, 2g + p + 1, -1) = (-1)^p \frac{H(2g + p) H(2n - 2f - 2g - p)}{H(2n - 2f)} a'_{2n-2f-2g-p}$$

wo

$$a'_0 = 1$$

$$a'_1 = -(2n - 4f)$$

$$a'_2 = -\frac{1}{2} (2n - 4f) a'_1 - \frac{1}{2} 2n$$

$$a'_3 = -\frac{1}{3} (2n - 4f) a'_2 - \frac{1}{3} (2n - 1) a'_1$$

etc.

ist. Substituirt man diese Ausdrücke in (36), so erhält man

$$\begin{aligned}
C(n-2f, -(n-2f-2g)) &= \frac{II(2n-2f) II(2f)}{2^{4n-2f-2g} II(n-f) II(f) II(n-f-g) II(f+g)} \frac{\sin^{2g} \frac{1}{2} J}{\cos^{2n-4f-2g} \frac{1}{2} J} \\
&\times \sum_{p=0}^{p=2n-2f-2g} B(2n-2f-2g, p) a_{2f} \cos^p J \\
&= \frac{II(2n-2f-2g) II(2f+2g)}{2^{4n-2f-2g} II(n-f) II(f) II(n-f-g) II(f+g)} \frac{\sin^{2g} \frac{1}{2} J}{\cos^{2n-4f-2g} \frac{1}{2} J} \\
&\times \sum_{p=0}^{p=2n-2f-2g} (-1)^p B(2f+2g+p, p) a'_{2n-2f-2g-p} \cos^p J
\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass in diesen Ausdrücken die numerischen Coefficienten der Potenzen von $\cos J$ im Allgemeinen weit kleiner sind, wie in den Ausdrücken des vor. Art. Die Vorstehenden bestehen aber im Allgemeinen aus mehr Gliedern wie jene, da, einzelne Fälle ausgenommen, $2n - 2f - 2g > 2f$ ist. Man kann aber noch andere nach den Potenzen von $\cos J$ fortschreitende Ausdrücke erhalten, die aus derselben Anzahl von Gliedern bestehen, wie die früheren. Diese bekommt man durch das folgende Verfahren.

30.

Stellt man die im vor. Art. angewandte Verwandelungsformel so,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1})$$

und wendet diese auf die F Function des Ausdrucks (36) an, so bekommt man

$$(39) \quad F(-(2n-2f-2g), -2f, 2g+1, -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J) = \cos^{-4f} \frac{1}{2} J \cdot F(2n-2f+1, -2f, 2g+1, \sin^2 \frac{1}{2} J)$$

Auf dieselbe Weise wie im vor. Art. wird hier

$$(40) \quad F(2n-2f+1, -2f, 2g+1, \sin^2 \frac{1}{2} J) = \frac{II(2f) II(2g)}{II(2n-2f)} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2f} (-1)^{\sigma} \frac{II(2n-2f+\sigma) \sin^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{II(2f-\sigma) II(2g+\sigma) II(\sigma)}$$

und durch die Substitution des Ausdrucks (38) wird

$$\begin{aligned}
&\sum (-1)^{\sigma} \frac{II(2n-2f+\sigma) \sin^{2\sigma} \frac{1}{2} J}{II(2f-\sigma) II(2g+\sigma) II(\sigma)} = \\
&\sum_{p=0}^{p=2f} \frac{II(2n-2f+p) \cos^p J}{2^p II(2f-p) II(2g+p) II(p)} F(2n-2f+p+1, -2f+p, 2g+p+1, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Die obige Verwandelungsformel giebt nun

$$\begin{aligned}
&F(2n-2f+p+1, -2f+p, 2g+p+1, \frac{1}{2}) = \\
&\frac{1}{2^{2f-p}} F(-(2n-2f-2g), -(2f-p), 2g+p+1, -1)
\end{aligned}$$

und durch Anwendung der Summenformeln (11) und (12) erhält man

$$F(-(2n-2f-2g), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = \frac{\Pi(2g+p) \Pi(2n-2f-2g)}{\Pi(2n-2f+p)} a'_{2n-2f-2g}$$

wo $a'_0 = 1$

$$a'_1 = -(2n - 4f - 2p)$$

$$a'_2 = -\frac{1}{2} (2n - 4f - 2p) a'_1 - \frac{1}{2} 2n$$

$$a'_3 = -\frac{1}{3} (2n - 4f - 2p) a'_2 - \frac{1}{3} (2n - 1) a'_1$$

etc.

und

$$F(-(2n-2f-2g), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = (-1)^p \frac{\Pi(2g+p) \Pi(2f-p)}{\Pi(2f+2g)} a_{2f-p}$$

wo $a_0 = 1$

$$a_1 = (2n - 4f - 4g)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (2n - 4f - 4g) a_1 - \frac{1}{2} 2n$$

$$a_3 = \frac{1}{3} (2n - 4f - 4g) a_2 - \frac{1}{3} (2n - 1) a_1$$

etc.

Die Substitution dieser Ausdrücke in (36) giebt schliesslich

$$\begin{aligned} C(n-2f, -(n-2f-2g)) &= \frac{\Pi(2n-2f-2g) \Pi(2f+2g)}{2^{2n+2f} \Pi(n-f) \Pi(f) \Pi(n-f-g) \Pi(f+g)} \cos^{2n-4f-2g} \frac{1}{2} J. \sin^{2g} \frac{1}{2} J \\ &\times \sum_{p=0}^{p=2f} B(2f, p) a'_{2n-2f-2g} \cos^p J \\ &= \frac{\Pi(2n-2f) \Pi(2f)}{2^{2n+2f} \Pi(n-f) \Pi(f) \Pi(n-f-g) \Pi(f+g)} \cos^{2n-4f-2g} \frac{1}{2} J. \sin^{2g} \frac{1}{2} J \\ &\times \sum_{p=0}^{p=2f} (-1)^p B(2n-2f+p, p) a_{2f-p} \cos^p J \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke bestehen aus derselben Anzahl von Gliedern wie die nach den Potenzen von $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$, und die nach den von $\frac{\cos J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$ fortschreitenden, es sind aber in den vorstehenden die numerischen Coefficienten im Allgemeinen weit kleiner wie in jenen.

31.

Es lassen sich ausserdem noch Ausdrücke für die C Coefficienten geben, in welchen die Coefficienten noch weit kleiner werden wie in den vorhergehenden. Diese erhält man, wenn man statt der Potenzen von $\sin^2 \frac{1}{2} J$ die Cosinusse der Vielfachen von J einführt. Ich werde zuerst zeigen wie der analytische Ausdruck der Coefficienten für diese Form beschaffen ist. Substituiert man den Ausdruck

$$\sin^{2\sigma} \frac{1}{2} J = \sum_{i=-\sigma}^{i=+\sigma} \frac{(-1)^i}{2^{2\sigma}} \frac{\Pi(2\sigma)}{\Pi(\sigma+i) \Pi(\sigma-i)} \cos iJ$$

in (40), so bekommt man

$$(41) F(2n - 2f + 1, -2f, 2g + 1, \sin^2 \frac{1}{2} J) = \frac{\Pi(2f) \Pi(2g)}{\Pi(2n - 2f)} \sum_{i=-\sigma}^{i=+\sigma} \sum_{\sigma=i}^{\sigma=2f} \frac{(-1)^{\sigma+i}}{2^{2\sigma}} \frac{\Pi(2n - 2f + \sigma) \Pi(2\sigma) \cos iJ}{\Pi(2f - \sigma) \Pi(2g + \sigma) \Pi(\sigma) \Pi(\sigma + i) \Pi(\sigma - i)}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass der Coefficient von $\cos iJ$ keine F Function, sondern eine hypergeometrische Reihe ist, in welcher in jedem Gliede drei Factoren im Zähler, und eben so viele im Nenner mehr als im nächst vorhergehenden enthalten sind, während in den F Functionen die Vermehrung der Factoren von Glied zu Glied nur zwei im Zähler und eben so viele im Nenner beträgt. Hier sind wir also über die Grenzen des weiten Gebiets der F Functionen hinaus gekommen. Ich werde aber zeigen, dass sich im gegenwärtigen Falle die Coefficienten von $\cos iJ$ durch Kettenbrüche leicht und sicher berechnen lassen.

32.

Sei

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \frac{1}{2} J) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \dots \\ + H_1 \frac{1}{z} + H_2 \frac{1}{z^2} + \dots$$

welche Gleichung dadurch möglich wird, dass man

$$2 \cos J = z + \frac{1}{z}$$

setzt, indem daraus schliesslich

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \frac{1}{2} J) = H_0 + 2H_1 \cos J + 2H_2 \cos 2J + \text{etc.}$$

hervorgeht. Nehmen wir nun die bekannte Differentialgleichung vor, welcher durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Genüge geleistet wird, nemlich

$$\frac{d^2 F}{dx^2} (x - x^2) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

und machen darin mittelst der Gleichung

$$4x = z + \frac{1}{z} - 2$$

z zur unabhängigen Veränderlichen. Dadurch wird sie

$$\frac{d^2 F}{dz^2} (z^2 - z^4) + \frac{dF}{dz} [(1 - \alpha - \beta)z + 2(1 + \alpha + \beta - 2\gamma)z^2 - (1 + \alpha + \beta)z^3] + \alpha\beta(1 - z^2)F = 0$$

Substituirt man hierin die Reihe

$$F = H_{i+1} z^{i+1} + H_i z^i + H_{i-1} z^{i-1} + \dots$$

so bekommt man folgende Bedingungsgleichung zwischen den H Co-efficienten

$$0 = (i+1-\alpha)(i+1-\beta)H_{i+1} + 2i(1+\alpha+\beta-2\gamma)H_i - (i-1+\alpha)(i-1+\beta)H_{i-1}$$

welche schon von Kummer entwickelt und benutzt worden ist.

33.

Wenden wir die eben abgeleitete Bedingungsgleichung zuerst auf die Function

$$F(2n - 2f + 1, -2f, 2g + 1, \sin^2 \frac{1}{2} J)$$

an, dann wird sie

$$(2n - 2f - i)(2f + 1 + i) H_{i+1} - 4i(n - 2f - 2g) H_i - (2n - 2f + i)(2f + 1 - i) H_{i-1} = 0 \quad (42)$$

Auf diese Gleichung kann man die Methode anwenden, die ich in meiner vorigen Abhandlung erklärt habe. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{H_i}{H_{i-1}} &= p_i, \quad p_i = -F_i \gamma_i \\ F_i &= \frac{(2n - 2f + i)(2f + 1 - i)}{4(n - 2f - 2g)i} \\ \lambda_i &= F_i \frac{(2n - 2f + 1 - i)(2f + i)}{4(n - 2f - 2g)(i - 1)} \end{aligned}$$

so wird zufolge der vorstehenden Bedingungsgleichung

$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \lambda_{i+1} \gamma_{i+1}}$$

woraus nach und nach in umgekehrter Ordnung alle γ_i sicher berechnet werden können, wenn der letzte derselben gegeben ist. Aber die obige F Function ist eine endliche Reihe, die aus $2f$ Gliedern besteht, der letzte der γ_i ist daher γ_{2f} . Setzt man daher

$$i = 2f + 1$$

in die vorstehenden Ausdrücke, so bekommt man

$$F_{2f+1} = 0, \quad \lambda_{2f+1} = 0, \quad p_{2f+1} = 0$$

und

$$\gamma_{2f} = 1$$

Dieser bildet also den Anfangswerth, durch welchen nach und nach $\gamma_{2f-1}, \gamma_{2f-2}, \dots, \gamma_1$ erhalten werden. Es wird nun schliesslich

$$H_i = H_0 p_1 p_2 \dots p_i$$

woraus alle H Coefficienten hervorgehen, wenn H_0 anderweitig gefunden worden ist. In unserm Falle hat aber H_0 einen zusammengesetzten Ausdruck, und dahingegen H_{2f} einen einfachen, es ist daher zweckmässiger, diesen der Berechnung der übrigen H Coefficienten zu Grunde zu legen. Der vorstehende Ausdruck giebt

$$H_{2f} = H_0 p_1 \cdot p_2 \dots p_{2f}$$

und hieraus erhält man durch die Division

$$H_i = \frac{H_{2f}}{p_{2f} \cdot p_{2f-1} \dots p_{i+1}}$$

Den Ausdruck für H_{2f} bekommt man auf einfache Weise aus (41), wenn man darin $i = 2f$ macht, denn man sieht, dass in diesem Falle $\sigma = 2f$ der einzige Werth ist, den σ annehmen kann. Es ergibt sich auf diese Art

$$H_{2f} = \frac{II(2n) II(2g)}{2^{4f} II(2n-2f) II(2f+2g)}$$

Substituirt man die hier gefundenen Ausdrücke in (39) und (36), so bekommt man

$$C(n-2f, -(n-2f-2g)) = \frac{II(2n) \cos^{2n-4f-2g} \frac{1}{2} J \cdot \sin^{2g} \frac{1}{2} J}{2^{2n+4f-1} II(n-f) II(f) II(n-f-g) II(f+g)} \sum_{i=0}^{i=2f} \frac{\cos iJ}{p_{2f} \cdot p_{2f-1} \cdots p_{i+1}}$$

welcher Ausdruck aber mit 2 dividirt werden muss, wenn $i = 0$ ist.

34.

Es giebt einen Fall, in welchem der eben entwickelte Ausdruck unbestimmt wird, nemlich wenn

$$n - 2f - 2g = 0$$

wird. Es werden dann F_i und λ_i unendlich, und können nicht mehr angewandt werden. In diesem Falle fällt aber in der Gleichung (42) das mittlere Glied weg, weshalb

$$(2n-2f-i)(2f+1+i) H_{i+1} - (2n-2f+i)(2f+1-i) H_{i-1} = 0$$

wird. Im C Coefficienten werden nun die Coefficienten aller von den ungraden Vielfachen von J abhängigen Glieder gleich Null, und die Coefficienten der von den graden Vielfachen von J abhängigen Glieder können leicht mittelst der vorstehenden Gleichungen erhalten werden. Diese giebt allgemein

$$H_{i-1} = \frac{(2n-2f-i)(2f+1+i)}{(2n-2f+i)(2f+1-i)} H_{i+1}$$

also, wenn man zugleich n durch die Gleichung

$$n = 2f + 2g$$

eliminirt,

$$H_{2f-2} = \frac{2f(4g+1)}{(4f+4g-1)} H_{2f}$$

$$H_{2f-4} = \frac{(2f-1)(4g+3)}{2(4f+4g-3)} H_{2f-2}$$

etc.

Setzt man daher

$$q_i = \frac{(f+i)(2f+4g+1-2i)}{(f+1-i)(2f+4g-1+2i)}$$

so wird

$$C(n-2f, 0) = \frac{H(2n) \cos^{2g} \frac{1}{2} J \sin^{2g} \frac{1}{2} J}{2^{2n+4f-1} H(n-f) H(f) H(n-f-g) H(f+g)} \sum_{i=f}^{i=0} q_f \cdot q_{f-1} \cdots q_{i+1} \cos 2iJ$$

wo wieder der Coefficient des Gliedes, für welches $i = 0$ ist, mit 2 dividirt werden muss.

35.

Die Anwendung der Methode der beiden vor. Artt. auf die F Function des Art. 29, nemlich auf

$$F(- (2n - 2f - 2g), 2f + 2g + 1, 2g + 1, \sin^2 \frac{1}{2} J)$$

giebt zwar eine Reihe, die mit wenigen Ausnahmen aus mehreren Gliedern besteht wie die eben erhaltene, dafür aber noch kleinere Coefficienten hat. Diese Reihe will ich kurz angeben. Die Bedingungs-
gleichung zwischen den H Coefficienten wird

$$0 = (2n - 2f - 2g + 1 + i) (2f + 2g - i) H_{i+1} + \lambda_i (n - 2f) H_i - (2n - 2f - 2g + 1 - i) (2f + 2g + i) H_{i-1}$$

Setzt man daher jetzt

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} = r_i; \quad r_i = K_i \theta_i$$

$$K_i = \frac{(2n - 2f - 2g + 1 - i) (2f + 2g + i)}{4 (n - 2f) i}$$

$$\lambda_i = K_i \frac{(2n - 2f - 2g + i) (2f + 2g + 1 - i)}{4 (n - 2f) (i - 1)}$$

so wird

$$\theta_i = \frac{1}{1 + \lambda_{i+1} \theta_{i+1}}$$

die Gleichung, aus welcher nach und nach alle θ_i berechnet werden müssen.

Die Reihe besteht jetzt aus $2n - 2f - 2g$ Gliedern, denn substituirt man

$$i = 2n - 2f - 2g + 1$$

so wird

$$K_{2n-2f-2g+1} = 0, \quad \lambda_{2n-2f-2g+1} = 0, \quad r_{2n-2f-2g+1} = 0$$

und

$$\theta_{2n-2f-2g} = 1$$

welches der Anfangswerth der θ_i ist. Zu bemerken ist, dass die θ_i hier einen Cyclus bilden, welcher mit

$$\theta_{2f+2g} = 1$$

endigt, ohne dass r_{2f+2g} verschwindet. Denn substituirt man den Werth

$$i = 2f + 2g + 1$$

so wird

$$\lambda_{2f+2g+1} = 0$$

ohne dass $K_{2f+2g+1}$ verschwindet. Innerhalb dieses Cyclus ist

$$-\frac{K_i}{\lambda_i}$$

ein Näherungswerth von θ_i , wenn n eine grosse Zahl ist. Mit diesem Näherungswerthe kann man in den Fällen, wo man nicht alle θ_i nöthig hat, die Rechnung anfangen. Es wird nun wie oben

$$H_i = \frac{H_{2n-2f-2g}}{r_{2n-2f-2g} \cdot r_{2n-2f-2g-1} \cdots r_{i+1}}$$

und man findet

$$H_{2n-2f-2g} = \frac{II(2g) II(2n)}{2^{4n-4f-4g} II(2f+2g) II(2n-2f)}$$

Man erhält daher schliesslich

$$C(n-2f, -(n-2f-2g)) = \frac{II(2n) \cos^{-2n+4f+2g} \frac{1}{2} J \cdot \sin 2g \frac{1}{2} J}{2^{6n-4f-4g} II(n-f) II(f) II(n-f-g) II(f+g)} \sum_{i=0}^{i=2n-2f-2g} \frac{\cos iJ}{r_{2n-2f-2g} \cdots r_{i+1}}$$

Wenn $n = 2f$ ist, so hören diese Formeln auf brauchbar zu sein, aber dieser Fall ist stets mit $n = 2f + 2g$, oder mit $g = 0$ verbunden, d. h. er kommt nur in $C(0,0)$ vor, und in diesem Falle wird man auf Ausdrücke hingeführt, die mit denen des vor. Art. völlig identisch sind. Es braucht daher dieser Fall hier nicht besonders berücksichtigt zu werden.

36.

Seien f und f' die wahren Anomalien der Himmelskörper m und m' , so wie II und II' die in der Richtung der Bewegung gezählten Entfernungen der Perihelien von dem gegenseitigen Knoten, in welchem U und U' ihren Anfang nehmen. Dann ist

$$U = f + II; U' = f' + II'$$

und wenn man mit x und x' die zu f und f' gehörigen imaginären Exponentialfunctionen bezeichnet,

$$u = xc^{\pi\sqrt{-1}}; u' = x'c^{\pi'\sqrt{-1}}$$

Hieraus ergibt sich, wenn μ und μ' irgend welche Exponenten bezeichnen,

$$u^\mu u'^{-\mu'} = x^\mu x'^{-\mu'} \{ \cos(\mu II - \mu' II') + i \sin(\mu II - \mu' II') \}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Setzt man daher

$$A(n, -n) = C(n, -n) \cos(n\Pi - n\Pi')$$

$$A(n, -(n-2)) = C(n, -(n-2)) \cos(n\Pi - (n-2)\Pi')$$

$$A(n, -(n-4)) = C(n, -(n-4)) \cos(n\Pi - (n-4)\Pi')$$

etc.

$$B(n, -n) = C(n, -n) \sin(n\Pi - n\Pi')$$

$$B(n, -(n-2)) = C(n, -(n-2)) \sin(n\Pi - (n-2)\Pi')$$

$$B(n, -(n-4)) = C(n, -(n-4)) \sin(n\Pi - (n-4)\Pi')$$

etc.

$$A(n-2, -n) = C(n, -(n-2)) \cos((n-2)\Pi - n\Pi')$$

$$A(n-2, -(n-2)) = C(n-2, -(n-2)) \cos((n-2)\Pi - (n-2)\Pi')$$

$$A(n-2, -(n-4)) = C(n-2, -(n-4)) \cos((n-2)\Pi - (n-4)\Pi')$$

etc.

$$B(n-2, -n) = C(n, -(n-2)) \sin((n-2)\Pi - n\Pi')$$

$$B(n-2, -(n-2)) = C(n-2, -(n-2)) \sin((n-2)\Pi - (n-2)\Pi')$$

$$B(n-2, -(n-4)) = C(n-2, -(n-4)) \sin((n-2)\Pi - (n-4)\Pi')$$

etc.

$$A(n-4, -n) = C(n, -(n-4)) \cos((n-4)\Pi - n\Pi')$$

$$A(n-4, -(n-2)) = C(n-2, -(n-4)) \cos((n-4)\Pi - (n-2)\Pi')$$

$$A(n-4, -(n-4)) = C(n-4, -(n-4)) \cos((n-4)\Pi - (n-4)\Pi')$$

etc.

$$B(n-4, -n) = C(n, -(n-4)) \sin((n-4)\Pi - n\Pi')$$

$$B(n-4, -(n-2)) = C(n-2, -(n-4)) \sin((n-4)\Pi - (n-2)\Pi')$$

$$B(n-4, -(n-4)) = C(n-4, -(n-4)) \sin((n-4)\Pi - (n-4)\Pi')$$

etc.

so bekommt man für die D Coefficienten des Ausdrucks

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} D_n \frac{r^n}{r^{n+1}}$$

des Art. 22 den folgenden Ausdruck

$$D_n = \sum A(k, k') x^k x'^{k'} + i \sum B(k, k') x^k x'^{k'}$$

wo die Summationen

von $k = n$

und $k' = -n$

anfangen, und nur bis dahin fortgesetzt zu werden brauchen, wo beide Exponenten anfangen ihr Zeichen umzukehren. Denn da Δ eine reelle Grösse ist, so wird nothwendig

$$A(-k, -k') = A(k, k'); B(-k, -k') = -B(k, k')$$

Man darf aber in diesen Coefficienten die Indices nicht mit einander vertauschen, wie in den C Coefficienten erlaubt ist, denn man sieht aus den vorstehenden Formeln, dass die einander gleichen $C(k, k')$ und $C(k', k)$ mit den Cosinussen und Sinussen verschiedener Bögen multiplicirt sind. Der Uebergang zum Reellen wird auf ähnliche Weise bewirkt, wie im Art. 22 an den E Coefficienten gezeigt wurde. Man muss nemlich allenthalben

$$\begin{aligned} & 2 \cos(kf + k'f') \text{ für } x^k x'^{k'} \\ \text{und} & - 2 \sin(kf + k'f') \text{ für } ix^k x'^{k'} \end{aligned}$$

schreiben, und nur in dem mit $x^0 x'^0$ multiplicirten Gliede unterbleibt die Multiplication mit 2. Es wird also mit Rücksicht auf diese Ausnahme

$$D_n = 2 \sum A(k, k') \cos(kf + k'f') - 2 \sum B(k, k') \sin(kf + k'f')$$

Es ist übrigens $A(0,0) = C(0,0)$, $B(0,0) = 0$

37.

Ich werde nun von der Function, die der Gegenstand dieser Abhandlung ist, eine specielle Entwicklung geben, deren Anwendung ich aber erst dann zeigen kann, wenn ich zu den Anwendungen dieser Entwicklungen überhaupt komme, welches ich auf eine spätere Zeit verschieben muss, indem sonst diese Abhandlung zu viel Raum einnehmen würde. Setzt man

$$(43) \quad \begin{cases} \cos J \sin U = \cos B \sin L \\ \cos U = \cos B \cos L \\ \sin J \sin U = \sin B \end{cases}$$

und substituirt diese sowohl wie $U' = f' + \Pi'$ in

$$\frac{\Delta^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{r}{r'} (\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$$

so geht diese über in

$$(44) \quad \frac{\Delta^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{r}{r'} \cos B \cos(f' + \Pi' - L)$$

und man bekommt einen analogen Ausdruck, wenn man U mit U' vertauscht. Giebt man nun U einen bestimmten Werth, so erhalten B und L auch bestimmte Werthe, und die Aufgabe ist $\frac{1}{\Delta}$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach den Potenzen von r und r' , und nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von f' fortschreitet. Sei

$$2 \cos(f' + \Pi' - L) = \gamma + \frac{1}{\gamma}$$

dann wird (44)

$$\frac{\Delta^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - \frac{r}{r'} \cos B \cdot \gamma - \frac{r}{r'} \cos B \cdot \frac{1}{\gamma}$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$g = \cos B, h = \sin B$$

dann verwandelt man diesen Ausdruck leicht in

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2}{r'^2} &= 1 + \frac{r^2}{r'^2} - \frac{r}{r'} \left(g\gamma + \frac{1}{g\gamma} \right) + \frac{r}{r'} \frac{h^2}{g\gamma} \\ &= \left(1 - \frac{r}{r'} g\gamma \right) \left(1 - \frac{r}{r'} \frac{1}{g\gamma} \right) + \frac{r}{r'} \frac{h^2}{g\gamma} \end{aligned}$$

welche Form der des Ausdruckes (15) analog ist. Macht man hierin

$$G = 1 - \frac{r}{r'} g\gamma; G' = 1 - \frac{r}{r'} \frac{1}{g\gamma}$$

so bekommt man, dem Ausdruck (18) ähnlich,

$$\frac{r'}{\Delta} = \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \left(\frac{r}{r'} \right)^u \frac{h^{2u}}{(g\gamma)^u} \frac{\Pi(2u)}{2^{2u} (\Pi(u))^2} (GG')^{-\frac{2u+1}{2}} \quad (45)$$

38.

Es findet sich nun leicht

$$G^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum \left(\frac{r}{r'} \right)^m \frac{\Pi(2u+2m) \Pi(u)}{2^{2m} \Pi(u+m) \Pi(2u) \Pi(m)} (g\gamma)^m$$

$$G'^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum \left(\frac{r}{r'} \right)^\mu \frac{\Pi(2u+2\mu) \Pi(u)}{2^{2\mu} \Pi(u+\mu) \Pi(2u) \Pi(\mu)} (g\gamma)^{-\mu}$$

und wenn man

$$(GG')^{-\frac{2u+1}{2}} = \sum H_n \left(\frac{r}{r'} \right)^n$$

und

$$H_n = \sum_{\mu=0}^n L(n, \mu) \gamma^{n-2\mu}$$

setzt, so geben die vorstehenden Ausdrücke, wenn man sie mit einander multiplicirt und

$$m + \mu = n$$

macht

$$L(n, \mu) = \frac{\Pi(2n+2u-2\mu) \Pi(2u+2\mu) (\Pi(u))^2 g^{n-2\mu}}{2^{2n} \Pi(n+u-\mu) \Pi(u+\mu) \Pi(n-\mu) \Pi(\mu) (\Pi(2u))^2}$$

welcher Ausdruck dem Ausdrucke (20) analog ist. Sei

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{r^n}{r'^{n+1}}$$

so wird M_n die Form

$$M_n = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} N(n, \mu) \cdot \gamma^{n-2\mu}$$

haben. Die Substitution der obigen Ausdrücke in (45) giebt

$$\begin{aligned} M_n &= \sum (-1)^u \frac{H(2u)}{2^{2u} (H(u))^2} \frac{h^{2u}}{(g\gamma)^u} H_{n-u} \\ &= \sum \sum_{\mu=0}^{\mu=n} (-1)^u \frac{H(2u)}{2^{2u} (H(u))^2} \frac{h^{2u}}{g^u} L(n-u, \mu-u) \gamma^{n-2\mu} \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$(46) \quad N(n, \mu) = g^{n-2\mu} \sum_{u=0}^{u=\mu} (-1)^u \frac{H(2n+2u-2\mu) H(2\mu) h^{2u}}{2^{2n} H(n+u-\mu) H(\mu) H(n-\mu) H(\mu-u) H(2u)}$$

welche $N(n, \mu)$ durch bekannte Grössen giebt, und zur Anwendung vorzugsweise geeignet ist, wenn h oder $\sin B$ klein ist.

Setzt man wie oben

$$2 \cos f' = x' + \frac{1}{x'}$$

und allgemein

$$P(n, \mu) = N(n, \mu) \cos(n-2\mu)(H'-L)$$

$$Q(n, \mu) = N(n, \mu) \sin(n-2\mu)(H'-L)$$

so wird

$$M_n = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} P(n, \mu) \cdot x'^{n-2\mu} + i \sum_{\mu=0}^{\mu=n} Q(n, \mu) \cdot x'^{n-2\mu}$$

Da hier nothwendig die Gleichungen

$$P(n, n-\mu) = P(n, \mu)$$

$$Q(n, n-\mu) = -Q(n, \mu)$$

statt finden müssen, so braucht man im vorstehenden Ausdruck die Summationen nur bis dahin fortzusetzen, wo der Exponent von x' anfängt negativ zu werden. Man braucht daher auch durch (46) nur die entsprechenden N Coefficienten zu berechnen, das ist

$$\text{von } \mu = 0 \text{ bis } \mu = \frac{n}{2} \text{ oder } \frac{n-1}{2}$$

je nachdem n grade oder ungrade ist. Wenn man weiter rechnet, so erhält man durch (46) die N Coefficienten scheinbar von jenen verschieden, in der That aber denselben gleich. Geht man zum Reellen über, so wird

$$M_n = 2 \sum P(n, \mu) \cos(n-2\mu)f' - 2 \sum Q(n, \mu) \sin(n-2\mu)f'$$

wo aber in dem Gliede $P(0,0)$ die Multiplication mit 2 unterbleiben muss. Hiemit ist die Aufgabe gelöst.

39.

Ich werde nun noch den Ausdruck (46) näher untersuchen und umformen. Setzt man

$$N(n, \mu) = \cos^{n-2\mu} B \sum_{u=0}^{\mu} (-1)^u R \sin^{2u} B \quad (47)$$

und drückt R durch die im Art. 24 eingeführten ϱ und π Functionen aus, so bekommt man

$$R = \varrho(n - \mu, u) \cdot \varrho(\mu - u, 0) \cdot \pi(\mu - u, u)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Ausdrucke (29) der C Coefficienten, so erkennt man, dass

$$R = P$$

wird, wenn man in dem Ausdruck für P des Art. 24

$$\sigma = 0, f = \mu - u, g = u$$

schreibt. Die Zahlenwerthe R der N Coefficienten sind also alle in der ersten Columnne der Tafel IV enthalten, und brauchen daher nicht besonders berechnet zu werden. Ich habe sie aus dieser Tafel ausgezogen, und in der Tafel V zusammen gestellt.

40.

Schreibt man die ersten Glieder der Reihe des Ausdrucks (46) aus, so wird

$$N(n, \mu) = \cos^{n-2\mu} B \frac{\Pi(2n-2\mu) \Pi(2\mu)}{2^{2n} (\Pi(n-\mu))^2 (\Pi(\mu))^2} \\ \times \left\{ 1 - \frac{2n-2\mu+1 \cdot \mu}{1 \cdot 1} \sin^2 B + \frac{2n-2\mu+1 \cdot 2n-2\mu+3 \cdot \mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} \sin^4 B + \dots \right\}$$

also

$$N(n, \mu) = \cos^{n-2\mu} B \frac{\Pi(2n-2\mu) \Pi(2\mu)}{2^{2n} (\Pi(n-\mu))^2 (\Pi(\mu))^2} F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, \frac{1}{2}, \sin^2 B\right)$$

Die F Function dieses Ausdrucks kann man durch die Gleichung (9) in eine andere verwandeln, deren viertes Element $\cos^2 B$ ist. Diese Gleichung giebt

$$F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, \frac{1}{2}, \sin^2 B\right) = (-1)^\mu \frac{\Pi(n-\mu) \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(n-2\mu) \Pi(\frac{2\mu-1}{2})} \\ \times F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, n-2\mu+1, \cos^2 B\right)$$

und durch die Reductionsformel

$$\Pi\left(z - \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2z} \frac{\Pi(2z)}{\Pi(z)}$$

die auch im Art 21 angewandt wurde, lässt sich diese Gleichung in die folgende verwandeln,

$$F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, \frac{1}{2}, \sin^2 B\right) = (-1)^\mu 2^{2\mu} \frac{II(n-\mu) II(\mu)}{II(n-2\mu) II(2\mu)} \\ \times F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, n-2\mu+1, \cos^2 B\right)$$

in welcher alle Argumente der *II* Functionen ganze und positive Zahlen, die Null eingeschlossen, sind, da μ nie grösser wie $\frac{1}{2}n$ angenommen zu werden braucht. Wir erhalten hiemit

$$N(n, \mu) = (-1)^\mu \cos^{n-2\mu} B \frac{II(2n-2\mu)}{2^{2n-2\mu} II(n-2\mu) II(n-\mu) II(\mu)} \\ \times F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, n-2\mu+1, \cos^2 B\right)$$

oder durchweg durch *II* Functionen ausgedrückt,

$$N(n, \mu) = \sum_{p=0}^{\mu} (-1)^{\mu+p} \frac{II(2n-2\mu+2p) \cos^{n-2\mu+2p} B}{2^{2n-2\mu+2p} II(n-2\mu+p) II(n-\mu+p) II(\mu-p) II(p)}$$

welcher Ausdruck sich in dem Falle, wo $\cos B$ klein ist, vorzugsweise zur Anwendung eignet.

41.

Man kann ausserdem den Ausdruck der *N* Coefficienten in einen andern verwandeln, dessen Glieder mit den Cosinussen der Vielfachen von B multiplicirt sind. Substituirt man den Werth

$$h^{2u} = \sin^{2u} B = \sum_{i=-u}^{i=+u} \frac{(-1)^i}{2^{2u}} \frac{II(2u)}{II(u+i) II(u-i)} \cos 2iB$$

für h^{2u} in (46), so wird

$$N(n, \mu) = g^{n-2\mu} \sum \sum (-1)^{u+i} \frac{II(2n+2u-2\mu) II(2\mu) \cos 2iB}{2^{2n+2u} II(n+u-\mu) II(\mu) II(n-\mu) II(\mu-u) II(u+i) II(u-i)}$$

oder durch die *F* Function, welche implicite darin enthalten ist, ausgedrückt

$$N(n, \mu) = g^{n-2\mu} \sum_{i=0}^{i=\mu} \frac{II(2n+2i-2\mu) II(2\mu) \cos 2iB}{2^{2n+2i-1} II(n+i-\mu) II(\mu) II(n-\mu) II(\mu-i) II(2i)} \\ \times F\left(\frac{2n+2i-2\mu+1}{2}, -(\mu-i), 2i+1, 1\right)$$

wo aber von dem Gliede, welches $i=0$ entspricht, nur die Hälfte genommen werden darf. Diese *F* Function kann durch die im Art. 7 abgeleitete Summenformel (D) summirt werden, welche blos verlangt, dass das erste oder zweite Element eine ganze und negative Zahl sei, wie hier der Fall ist. Diese Summenformel giebt

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{2n+2i-2\mu+1}{2}, -(\mu-i), 2i+1, 1\right) &= (-1)^{\mu-i} \frac{\Pi\left(\frac{2n-2i-2\mu-1}{2}\right) \Pi(2i)}{\Pi\left(\frac{2n-4\mu-1}{2}\right) \Pi(\mu+i)} \\
 &= (-1)^{\mu-i} \frac{\Pi(2n-2i-2\mu) \Pi(n-2\mu) \Pi(2i)}{2^{2\mu-2i} \Pi(n-i-\mu) \Pi(2n-4\mu) \Pi(\mu+i)}
 \end{aligned}$$

nach Anwendung der obigen Reductionsformel. Es ergibt sich also

$$N(n, \mu) =$$

$$\cos^{n-2\mu} B \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^{\mu-i} \frac{\Pi(2\mu) \Pi(n-2\mu) \Pi(2n+2i-2\mu) \Pi(2n-2i-2\mu) \cos 2iB}{2^{2n+2\mu-1} \Pi(\mu) \Pi(2n-4\mu) \Pi(n-\mu) \Pi(n+i-\mu) \Pi(n-i-\mu) \Pi(\mu+i) \Pi(\mu-i)}$$

wo für $i=0$ dieselbe Bemerkung gilt wie oben.

Ich führe beiläufig an, dass man durch Verwandlung von μ in $n-\mu$ einen zweiten, auch nach den Cosinussen der Vielfachen von B fortschreitenden Ausdruck erhalten kann, welcher aber aus mehr Gliedern besteht wie der vorstehende. Einen dritten Ausdruck erhält man wenn man $\cos^{n-2\mu} B$ mit in die Verwandlung zieht.

42.

Ich werde nun zum Schlusse dieses § zeigen, wie man von den im Vorhergehenden ausgeführten Entwicklungen von Δ^{-1} zu denen von Δ^{-3} , Δ^{-5} , etc. übergehen kann. Die Gleichung

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$$

gibt durch die Differentiation nach r

$$r \left(\frac{d\Delta}{dr} \right) = \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{\Delta} \left(1 - \frac{r^2}{r'^2} \right)$$

Setzt man daher allgemein

$$Z_p = \left(\frac{r'}{\Delta} \right)^p$$

so wird

$$\begin{aligned}
 r \left(\frac{dZ_p}{dr} \right) &= -p \frac{r'^p}{\Delta^{p+1}} r \left(\frac{d\Delta}{dr} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} p Z_p + \frac{1}{2} p Z_{p+2} \left(1 - \frac{r^2}{r'^2} \right)
 \end{aligned}$$

woraus

$$Z_{p+2} = \frac{1}{p} \left\{ p Z_p + 2r \left(\frac{dZ_p}{dr} \right) \right\} \left(1 - \frac{r^2}{r'^2} \right)^{-1}$$

folgt.

Im Vorhergehenden wurde

$$Z_1 = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n D_n$$

entwickelt, und hieraus folgt

$$Z_1 + 2r \left(\frac{dZ_1}{dr}\right) = \sum_0^\infty (2n+1) \left(\frac{r}{r'}\right)^n D_n$$

Wenn man diesen Ausdruck mit

$$\left(1 - \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} + \frac{r^4}{r'^4} + \dots$$

multiplicirt, so bekommt man in Folge der vorstehenden allgemeinen Gleichung sogleich

$$Z_3 = \sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n \left\{ (2n+1) D_n + (2n-3) D_{n-2} + (2n-7) D_{n-4} + \dots \right\}$$

Aus diesem Ausdruck zieht man

$$3Z_3 + 2r \left(\frac{dZ_3}{dr}\right) =$$

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n \left\{ (2n+3)(2n+1) D_n + (2n+3)(2n-3) D_{n-2} + (2n+3)(2n-7) D_{n-4} + \dots \right\}$$

und hieraus mittelst derselben allgemeinen Gleichung

$$Z_5 = \frac{1}{3} \sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n \left\{ (2n+3)(2n+1) D_n + (4n+2)(2n-3) D_{n-2} + (6n-3)(2n-7) D_{n-4} + (8n-12)(2n-11) D_{n-6} + \dots \right\}$$

Um das Gesetz des Fortganges der ersten Factoren der D Coefficienten bemerklich zu machen, nehme ich die Differenzen derselben.

Die ersten Differenzen sind . . . $2n-4$, $2n-5$, $2n-9$, . . .

und die zweiten -4 , -4 , -4 . . .

woraus hervor geht, dass diese Factoren eine arithmetische Reihe zweiten Ranges bilden. Man kann sie also mittelst ihrer Differenzen so weit festsetzen, wie man will. Eben so findet man

$$Z_7 = \frac{1}{3 \cdot 5} \sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n \left\{ (2n+5)(2n+3)(2n+1) D_n + (3n+\frac{9}{2})(4n+2)(2n-3) D_{n-2} + (4n+2)(6n-3)(2n-7) D_{n-4} + (5n-\frac{5}{2})(8n-12)(2n-11) D_{n-6} + (6n-9)(10n-25)(2n-15) D_{n-8} + \dots \right\}$$

wo die ersten Factoren wieder eine arithmetische Reihe zweiten Ranges bilden, u. s. w.

Geht man zu den Potenzen von Δ über, und schreibt die ersten Glieder der eben entwickelten Ausdrücke aus, so erhält man

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r'^3} + 3D_1 \frac{r}{r'^4} + (5D_2 + 1) \frac{r^2}{r'^5} + (7D_3 + 3D_1) \frac{r^3}{r'^6} \\ + (9D_4 + 5D_2 + 1) \frac{r^4}{r'^7} + (11D_5 + 7D_3 + 3D_1) \frac{r^5}{r'^8} + \dots$$

$$\frac{1}{\Delta^5} = \frac{1}{r'^5} + 5D_1 \frac{r}{r'^6} + \left(\frac{35}{3}D_2 + \frac{10}{3}\right) \frac{r^2}{r'^7} + (21D_3 + 14D_1) \frac{r^3}{r'^8} \\ + (33D_4 + 30D_2 + 7) \frac{r^4}{r'^9} + \left(\frac{143}{3}D_5 + \frac{154}{3}D_3 + 27D_1\right) \frac{r^5}{r'^{10}} + \dots$$

$$\frac{1}{\Delta^7} = \frac{1}{r'^7} + 7D_1 \frac{r}{r'^8} + (21D_2 + 7) \frac{r^2}{r'^9} + \left(\frac{231}{5}D_3 + \frac{189}{5}D_1\right) \frac{r^3}{r'^{10}} \\ + \left(\frac{429}{5}D_4 + 99D_2 + \frac{126}{5}\right) \frac{r^4}{r'^{11}} + \left(143D_5 + \frac{1001}{5}D_3 + \frac{594}{5}D_1\right) \frac{r^5}{r'^{12}} + \dots$$

die man beliebig fortsetzen kann.

Ich bemerke noch, dass man auf ähnliche Art auch die Entwicklung der positiven Potenzen von Δ erhalten kann, werde mich aber dabei nicht aufhalten, da sie in der Störungstheorie nicht vorkommen.

§ III.

Entwicklung der Grösse $\frac{1}{\Delta}$ in Reihen, die nach den Potenzen von $\frac{rr'}{(r \pm r')^2}$ und $\frac{rr'}{r^2 + r'^2}$ fortschreiten.

43.

In Gauss «*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* etc.» ist schon gezeigt, wie die Grösse

$$(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^n$$

in Reihen wie die oben genannten entwickelt werden kann; die Entwicklung des zusammengesetzteren Ausdruckes, welcher hier überhaupt betrachtet wird, ist noch nirgends gegeben, kann aber sehr leicht erhalten werden, wie die folgenden Entwicklungen zeigen werden. Da die Grössen

$$\frac{rr'}{(r + r')^2} \text{ und } \frac{rr'}{r^2 + r'^2}$$

für jeden Werth von r und r' kleiner sind wie $\frac{r}{r'}$, so scheint es, dass die Anordnung der Reihen nach den Potenzen dieser Grössen auf grössere Convergenz führen müsste, wie die im Vorhergehenden

entwickelte, nach den Potenzen von $\frac{r}{r'}$ fortschreitende. Es ist dieses jedoch nicht der Fall, weil die Coefficienten im Allgemeinen weit grösser werden, und um dieses zu zeigen, werde ich die Entwicklungen hier vornehmen, mich jedoch dabei auf die von Δ^{-1} beschränken, da man aus dieser leicht die für die andern negativen und ungraden Potenzen von Δ erhalten kann.

44.

Den Ausdruck

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \frac{1}{2} J \cos (U - U') - 2rr' \sin^2 \frac{1}{2} J \cos (U + U')$$

bringt man leicht auf folgende Formen

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (r + r')^2 - 4rr' \cos^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} (U - U') - 4rr' \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} (U + U') \\ &= (r - r')^2 + 4rr' \cos^2 \frac{1}{2} J \sin^2 \frac{1}{2} (U - U') + 4rr' \sin^2 \frac{1}{2} J \sin^2 \frac{1}{2} (U + U') \end{aligned}$$

Führt man hierin die schon oben angewandten, imaginären Exponentialfunctionen durch die Gleichungen

$$2 \cos (U - U') = p + \frac{1}{p}, \quad 2 \cos (U + U') = q + \frac{1}{q}$$

ein, so bekommt man

$$\frac{\Delta^2}{(r \pm r')^2} = 1 - \frac{rr' \cos^2 \frac{1}{2} J}{(r \pm r')^2} \left\{ \left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J \left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}} \right)^2 \right\}$$

welche Formel beide obigen Formen umfasst. Setzt man nun zur Abkürzung

$$P = \left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J \left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}} \right)^2$$

so wird

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_0^\infty \frac{II(2n)}{2^{2n} (II(n))^2} \frac{r^n r'^n \cos^{2n} \frac{1}{2} J}{(r \pm r')^{2n+1}} P^n$$

wo nur noch der allgemeine Ausdruck der n^{ten} Potenz von P zu entwickeln ist.

45.

Durch den binomischen Satz bekommt man zuerst

$$P^n = \sum \frac{II(n)}{II(n-l) II(l)} \left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^{2(n-l)} \left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}} \right)^{2l} \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2} J$$

wo die Summe von $l = 0$ bis $l = n$ ausgedehnt werden muss. Derselbe Satz giebt ferner

$$\left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{2(n-l)} = \sum (\pm 1)^r \frac{\Pi(2n-2l)}{\Pi(2n-2l-r) \Pi(r)} p^{n-l-r}$$

wo die Summe von $r=0$ bis $r=2(n-l)$ genommen werden muss, und

$$\left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{2l} = \sum (\pm 1)^s \frac{\Pi(2l)}{\Pi(2l-s) \Pi(s)} q^{l-s}$$

wo die Summe von $s=0$ bis $s=2l$ genommen werden muss. Aus diesen drei Ausdrücken folgt sogleich

$$P^n = \sum (\pm 1)^{r+s} \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2} J \frac{\Pi(n) \Pi(2n-2l) \Pi(2l) p^{n-l-r} q^{l-s}}{\Pi(n-l) \Pi(l) \Pi(2n-2l-r) \Pi(r) \Pi(2l-s) \Pi(s)}$$

Da P eine reelle Grösse ist, so braucht man die Summationen nur bis dahin auszudehnen, wo beide Exponenten anfangen ihre Zeichen zu wechseln. Führen wir nun in den vorstehenden Ausdruck die zu den Bögen U und U' gehörigen imaginären Exponentialfunctionen ein, und bezeichnen sie wie oben mit u und u' . Aus den Relationen

$$p = \frac{u}{u'}, \quad q = uu'$$

erhalten wir

$$p^{n-l-r} q^{l-s} = u^{n-f} u'^{-(n-f-2g)}$$

wenn

$$r + s = f$$

$$2l + r - s = f + 2g$$

gesetzt wird. Diese beiden Gleichungen können wir anwenden um entweder r und s oder r und l zu eliminiren. Um r und l zu eliminiren erhält man folgende Gleichungen

$$r = f - s$$

$$l = g + s$$

und es ist auf die im vor. § auseinandergesetzte Art leicht zu finden, dass für jeden Werth von f und g in dem Ausdruck, der durch die genannten Eliminationen hervorgeht, die Summation in Bezug auf s von $s=0$ bis $s=f$ ausgedehnt werden muss. Führt man nun die oben genannten Substitutionen aus, so wird

$$P^n = \sum (\pm 1)^f \operatorname{tg}^{2(g+s)} \frac{1}{2} J \frac{\Pi(n) \Pi(2n-2g-2s) \Pi(2g+2s) u^{n-f} u'^{-(n-f-2g)}}{\Pi(n-g-s) \Pi(g+s) \Pi(2n-f-2g-s) \Pi(f-s) \Pi(2g+s) \Pi(s)}$$

46.

Substituirt man den eben gefundenen Ausdruck in den im Art. 44 abgeleiteten, und setzt

$$\frac{1}{\Delta} = \sum (\pm 1)^f T(n, f, g) u^{n-f} u' - (n-f-2g) \frac{r^n r'^n}{(r \pm r')^{2n+1}}$$

so wird

$$T(n, f, g) = \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \sum_{s=0}^{s=f} \frac{H(2n) H(2n-2g-2s) H(2g+2s) \operatorname{tg}^{2s} \frac{1}{2} J}{2^{2n} H(n) H(n-g-s) H(g+s) H(2n-f-2g-s) H(f-s) H(2g+s) H(s)}$$

Für die numerische Berechnung lässt sich dieser Ausdruck auf bekannte Gruppen von H Functionen hinführen und dadurch vereinfachen. Zufolge des vor. § ist

$$\varphi(n-g-s, g+s) = \frac{H(2n)}{2^{2n} H(n) H(n-g-s) H(g+s)}$$

und wenn wir den h^{ten} Binomialcoefficienten der l^{ten} Potenz mit $B(l, h)$ bezeichnen, so ist

$$B(l, h) = \frac{H(l)}{H(l-h) H(h)}$$

Hiemit wird

$$T(n, f, g) = \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \sum_0^f \varphi(n-g-s, g+s) \cdot B(2n-2g-2s, f-s) \cdot B(2g+2s, s) \cdot \operatorname{tg}^{2s} \frac{1}{2} J$$

Um zu zeigen, wie die numerischen Werthe dieser Coefficienten beschaffen sind, und um eine unmittelbare Vergleichung derselben mit den aus den Entwicklungen des vor. § folgenden, und in Tafel IV zusammen gestellten, zu bewirken, habe ich dieselben, aber nur bis $n=6$ in Tafel VI zusammengestellt. Man sieht, dass in beiden Tafeln die Coefficienten für die erste Abtheilung eines jeden Werthes von n , oder für $f=0$, einander gleich sind, dass aber in den andern Abtheilungen die Coefficienten der Tafel VI bedeutend und zunehmend grösser sind wie die correspondirenden der Tafel IV.

47.

Die Entwicklung von Δ^{-1} nach den Potenzen von $\frac{rr'}{r^2+r'^2}$ kann auf ähnliche Art wie die eben ausgeführte bewirkt werden. Der Ausdruck

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \frac{1}{2} J \cos(U-U') - 2rr' \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(U+U')$$

giebt zuerst

$$\frac{\Delta^2}{r^2 + r'^2} = 1 - \frac{r r' \cos^2 \frac{1}{2} J}{r^2 + r'^2} \left\{ \left(p + \frac{1}{p} \right) + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J \left(q + \frac{1}{q} \right) \right\}$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_0^\infty \frac{H(2n)}{2^{2n} (H(n))^2} \frac{r^n r'^n \cos^{2n} \frac{1}{2} J}{(r^2 + r'^2)^{\frac{2n+1}{2}}} Q^n$$

nachdem

$$Q = p + \frac{1}{p} + \left(q + \frac{1}{q} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$$

gesetzt worden ist.

48.

Wendet man nun auf die Entwicklung von Q^n den binomischen Satz auf ähnliche Art wie im Art. 45 an, so bekommt man zuerst die drei Ausdrücke

$$\begin{aligned} Q^n &= \sum \frac{H(n)}{H(n-l) H(l)} \left(p + \frac{1}{p} \right)^{n-l} \left(q + \frac{1}{q} \right)^l \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2} J \\ \left(p + \frac{1}{p} \right)^{n-l} &= \sum \frac{H(n-l)}{H(n-l-r) H(r)} p^{n-l-2r} \\ \left(q + \frac{1}{q} \right)^l &= \sum \frac{H(l)}{H(l-s) H(s)} q^{l-2s} \end{aligned}$$

wo die Summationen bez.

von $l = 0$ bis $l = n$

von $r = 0$ bis $r = n - l$

und von $s = 0$ bis $s = l$

ausgedehnt werden müssen. Aus diesen drei Ausdrücken folgt

$$Q^n = \sum \frac{H(n) \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2} J}{H(n-l-r) H(l-s) H(r) H(s)} p^{n-l-2r} q^{l-2s}$$

Führen wir nun u und u' statt p und q ein, so bekommen wir

$$p^{n-l-2r} q^{l-2s} = u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wenn wir jetzt

$$r + s = f$$

$$l + r - s = f + g$$

setzen. Für die Elimination von r und l ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$r = f - s$$

$$l = g + 2s$$

und es muss schliesslich wieder für jeden Werth von f und g die Summation in Bezug auf s von $s = 0$ bis $s = f$ ausgedehnt werden. Die Substitution dieser Ausdrücke giebt nun

$$Q^n = \sum \frac{\Pi(n) \operatorname{tg}^{2g+4s} \frac{1}{2} J}{\Pi(n-f-g-s) \Pi(g+s) \Pi(f-s) \Pi(s)} u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

49.

Durch die Substitution des eben gefundenen Ausdrucks für Q^n in die Formel des Art. 47 erhält man

$$\frac{1}{\Delta} = \sum S(n, f, g) u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)} \frac{r^n r'^n}{(r^2 + r'^2)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

wo

$$S(n, f, g) = \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \sum_{s=0}^f \frac{\Pi(2n) \operatorname{tg}^{4s} \frac{1}{2} J}{2^{2n} \Pi(n) \Pi(n-f-g-s) \Pi(g+s) \Pi(f-s) \Pi(s)}$$

ist. Zum Zweck der einfacheren numerischen Berechnung kann man diesen Ausdruck auch durch die ϱ und B Functionen zusammenziehen. Man findet

$$S(n, f, g) = \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \sum_{s=0}^f \varrho(n-f-g-s, f+g+s) \cdot B(f+g+s, f) \cdot B(f, s) \operatorname{tg}^{4s} \frac{1}{2} J$$

Man kann denselben Ausdruck auch durch eine F Function darstellen, es wird nemlich auch

$$S(n, f, g) = \cos^{2n} \frac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2g} \frac{1}{2} J \varrho(n-f-g, f+g) \cdot B(f+g, f) \cdot F(-f, -(n-f-g), g+1, \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} J)$$

Von dieser Function habe ich der leichteren Vergleichung mit den vorhergehenden wegen die numerischen Coefficienten bis $n = 6$ berechnet, und in Tafel VII angeführt.

Tafel I. $\log \varrho(z, z')$ [illegible]

Tafel II. $\log \pi(z, z')$

Argg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.4771213	1.0669468	1.6646420	2.2644805	2.8651980	3.4663598	4.0677768	4.6693540
1	0	0.6989700	1.3222193	1.9334873	2.5406869	3.1460246	3.7503564	4.3540836	4.9574190
2	0	0.8450980	1.5185139	2.1553360	2.7780478	3.3938091	4.0056289	4.6149964	
3	0	0.9542425	1.6782148	2.3443923	2.9863238	3.6156579	4.2375780	4.8547567	
4	0	1.0413927	1.8129134	2.5092025	3.1719604	3.8165727	4.4501861	5.0766054	
5	0	1.1139434	1.9294189	2.6553306	3.3394514	4.0002171	4.6464807		
6	0	1.1760913	2.0320813	2.7866095	3.4920616	4.1693595	4.8288210		
7	0	1.2304489	2.1238516	2.9057959	3.6322403	4.3261456	4.9990827		
8	0	1.2787536	2.2068259	3.0149404	3.7618742	4.4722736			
9	0	1.3222193	2.2825466	3.1156105	3.8824481	4.6091116			
10	0	1.3617278	2.3521825	3.2090322	3.9951524	4.7377782			
11	0	1.3979400	2.4166405	3.2961824	4.1009561				
12	0	1.4313638	2.4766384	3.3778524	4.2006590				
13	0	1.4623980	2.5327544	3.4546924	4.2949289				
14	0	1.4913617	2.5854607	3.5272431					
15	0	1.5185139	2.6351485	3.5959589					
16	0	1.5440680	2.6821451	3.6612257					
17	0	1.5682017	2.7267272						
18	0	1.5910646	2.7691311						
19	0	1.6127839	2.8095597						
20	0	1.6334685							
21	0	1.6532125							
22	0	1.6720979							
23	0								
24	0								
25	0								

Tafel III. $\log \lambda(g, \sigma)$

g	$\log \lambda(g, 0)$	$\log \lambda(g, 1)$	$\log \lambda(g, 2)$
$f=1$			
0	0.6020600		
1	0.1249387		
2	9.9030900		
3	9.7569620		
4	9.6478175		
5	9.5606673		
6	9.4881167		
7	9.4259687		
8	9.3716111		
9	9.3233064		
10	9.2798407		
11	9.24033		
12	9.20412		
13	9.17070		
14	9.13966		
15	9.11070		
16	9.08355		
17	9.05799		
18	9.03386		
$f=2$			
0	0.9030900	9.6478175	
1	0.4259687	9.4259687	
2	0.2041200	9.2798407	
3	0.0579920	9.1706962	
4	9.9488475	9.0835460	
5	9.8616973	9.0109954	
6	9.7891467	8.9488475	
7	9.7269987	8.8944898	
8	9.6726411	8.8461851	
9	9.6243364	8.8027194	
10	9.58087	8.76321	
11	9.54136	8.72700	
12	9.50515	8.69357	
13	9.47173	8.66254	
14	9.44069	8.63358	
15	9.41173	8.60643	
16	9.38458	8.58087	
$f=3$			
0	1.0791813	9.9488475	9.2041200
1	0.6020600	9.7269987	9.0579919
2	0.3802112	9.5808707	8.9488475
3	0.2340832	9.4717262	8.8616973
4	0.1249387	9.3845760	8.7891466
5	0.0377886	9.3120254	8.7269987
6	9.9652379	9.2498775	8.6726411
7	9.9030900	9.1955198	8.6243364
8	9.8487323	9.1472151	8.5808707
9	9.80043	9.10375	8.54136
10	9.75696	9.06424	8.50515
11	9.71745	9.02803	8.47173
12	9.68124	8.99460	8.44069
13	9.64782	8.96357	8.41173
14	9.61678	8.93461	8.38458

Tafel III. $\log \lambda(g, \sigma)$

g	$\log \lambda(g, 0)$	$\log \lambda(g, 1)$	$\log \lambda(g, 2)$	$\log \lambda(g, 3)$	$\log \lambda(g, 4)$	$\log \lambda(g, 5)$	$\log \lambda(g, 6)$	$\log \lambda(g, 7)$	$\log \lambda(g, 8)$	$\log \lambda(g, 9)$
$f = 4$										
0	1.2041200	0.1249387	9.5051500	8.9118639						
1	0.7269987	9.9030900	9.3590219	8.8027194						
2	0.5051500	9.7569620	9.2498775	8.7155693						
3	0.3590219	9.6478175	9.1627273	8.6430186						
4	0.2498775	9.5606673	9.0901766	8.5808707						
5	0.1627273	9.4881166	9.0280287	8.5265130						
6	0.0901766	9.4259687	8.9736711	8.4782084						
7	0.0280287	9.3716111	8.9253664	8.4347427						
8	9.97367	9.32331	8.88190	8.39523						
9	9.92537	9.27984	8.84239	8.35902						
10	9.88190	9.24033	8.80618	8.32560						
11	9.84239	9.20412	8.77276	8.29456						
12	9.80618	9.17070	8.74172	8.26560						
$f = 5$										
0	1.30103	0.24988	9.68124	9.21289	8.69358					
1	0.82391	0.02803	9.53511	9.10375	8.60642					
2	0.60206	9.88190	9.42597	9.01660	8.53387					
3	0.45593	9.77276	9.33882	8.94405	8.47173					
4	0.34679	9.68561	9.26627	8.88190	8.41737					
5	0.25964	9.61306	9.20412	8.82754	8.36906					
6	0.18709	9.55091	9.14976	8.77924	8.32560					
7	0.12494	9.49655	9.10146	8.73577	8.28609					
8	0.07058	9.44825	9.05799	8.69626	8.24988					
9	0.02228	9.40478	9.01848	8.66005	8.21646					
10	9.97881	9.36527	8.98227	8.62663	8.18542					
$f = 6$										
0	1.38021	0.34679	9.80618	9.38899	8.99461	8.51927				
1	0.90309	0.12494	9.66005	9.27984	8.90745	8.44672				
2	0.68124	9.97881	9.55091	9.19269	8.83490	8.38458				
3	0.53511	9.86967	9.46376	9.12014	8.77276	8.33022				
4	0.42597	9.78252	9.39121	9.05799	8.71840	8.28191				
5	0.33882	9.70997	9.32906	9.00363	8.67009	8.23845				
6	0.26627	9.64782	9.27470	8.95533	8.62663	8.19894				
7	0.20412	9.59346	9.22640	8.91186	8.58712	8.16273				
8	0.14976	9.54516	9.18293	8.87235	8.55091	8.12931				
$f = 7$										
0	1.44716	0.42597	9.90309	9.51392	9.17070	8.82030	8.37417			
1	0.97004	0.20412	9.75696	9.40478	9.08355	8.74775	8.31203			
2	0.74819	0.05799	9.64782	9.31763	9.01100	8.68561	8.25767			
3	0.60206	9.94885	9.56067	9.24508	8.94885	8.63125	8.20936			
4	0.49292	9.86170	9.48812	9.18293	8.89449	8.58294	8.16590			
5	0.40577	9.78915	9.42597	9.12857	8.84619	8.53948	8.12639			
6	0.33322	9.72700	9.37161	9.08027	8.80272	8.49997	8.09018			
$f = 8$										
0	1.50515	0.49292	9.98227	9.61083	9.29564	8.99640	8.67520	8.24988		
1	1.02803	0.27107	9.83614	9.50169	9.20848	8.92385	8.61306	8.19552		
2	0.80618	0.12494	9.72700	9.41454	9.13593	8.86170	8.55870	8.14722		
3	0.66005	0.01579	9.63985	9.34199	9.07379	8.80734	8.51039	8.10375		
4	0.55091	9.92865	9.56730	9.27984	9.01943	8.75904	8.46693	8.06424		
$f = 9$										
0	1.55630	0.55091	0.04922	9.69002	9.39255	9.12133	8.85129	8.55091	8.14116	
1	1.07918	0.32906	9.90309	9.58087	9.30539	9.04878	8.78915	8.49655	8.09286	
2	0.85733	0.18293	9.79395	9.49372	9.23284	8.98664	8.73479	8.44825	8.04939	
$f = 10$										
0	1.60206	0.60206	0.10721	9.75696	9.47173	9.21824	8.97623	8.72700	8.44219	8.04455

Tafel IV. Logg. der allgemeinen Coefficienten von $\frac{1}{\Delta}$

Exp.	$+ \lg \frac{1}{2} J$	$- \lg \frac{1}{2} J$	$+ \lg \frac{1}{2} J$	$- \lg \frac{1}{2} J$	$+ \lg \frac{1}{2} J$
	$\underline{D_0}$				
0, 0	0.				
	$\underline{D_1}$				
1, -1	9.6989700				
1, +1	9.6989700				
	$\underline{D_2}$				
2, -2	9.5740313				
2, 0	9.8750613				
2, +2	9.5740313				
0, 0	9.3979400	0.	9.3979400		
	$\underline{D_3}$				
3, -3	9.4948500				
3, -1	9.9719713				
3, +1	9.9719713				
3, +3	9.4948500				
1, -1	9.2730013	0.1760913	0.0511525		
1, +1	0.0511525	0.1760913	9.2730013		
	$\underline{D_4}$				
4, -4	9.4368580				
4, -2	0.0389181				
4, 0	0.2150093				
4, +2	0.0389181				
4, +4	9.4368580				
2, -2	9.1938200	0.2730013	0.3699113		
2, 0	0.1480626	0.5740313	0.1480626		
2, +2	0.3699113	0.2730013	9.1938200		
0, 0	9.1480626	0.3521826	0.7043652	0.3521826	9.1480626
	$\underline{D_5}$				
5, -5	9.3911006				
5, -3	0.0900706				
5, -1	0.3911006				
5, +1	0.3911006				
5, +3	0.0900706				
5, +5	9.3911006				
3, -3	9.1358280	0.3399480	0.5829861		
3, -1	0.2150094	0.8170694	0.6129493		
3, +1	0.6129493	0.8170694	0.2150094		
3, +3	0.5829861	0.3399480	9.1358280		
1, -1	9.0688813	0.4490926	1.0231239	0.9719713	0.2449726
1, +1	0.2449726	0.9719713	1.0231239	0.4490926	9.0688813
	$\underline{D_6}$				
6, -6	9.3533120				
6, -4	0.1314633				
6, -2	0.5294033				
6, 0	0.6543420				
6, +2	0.5294033				
etc.					

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg} 0\frac{1}{2}J$	$- \operatorname{tg} 2\frac{1}{2}J$	$+ \operatorname{tg} 4\frac{1}{2}J$	$- \operatorname{tg} 6\frac{1}{2}J$	$+ \operatorname{tg} 8\frac{1}{2}J$	$- \operatorname{tg} 10\frac{1}{2}J$	$+ \operatorname{tg} 12\frac{1}{2}J$
	$\underline{D_6}$						
4, — 4	9.0900706	0.3911006	0.7432831				
4, — 2	0.2661619	0.9931606	0.9351686				
4, 0	0.7890406	1.1692519	0.7890406				
4, + 2	0.9351686	0.9931606	0.2661619				
4, + 4	0.7432831	0.3911006	9.0900706				
2, — 2	9.0108893	0.5160393	1.2361987	1.3611373	0.8559874		
2, 0	0.3119194	1.2150094	1.4880106	1.2150094	0.3119194		
2, + 2	0.8559874	1.3611373	1.2361987	0.5160393	9.0108893		
0, 0	8.9897000	0.5460026	1.3418826	1.5917601	1.3418826	0.5460026	8.9897000
	$\underline{D_7}$						
7, — 7	9.3211273						
7, — 5	0.1662254						
7, — 3	0.6433466						
7, — 1	0.8651954						
7, + 1	0.8651954						
etc.							
5, — 5	9.0522820	0.4324933	0.8718260				
5, — 3	0.3075546	1.1314633	1.1826158				
5, — 1	0.9273433	1.4324933	1.1984100				
5, + 1	1.1984100	1.4324933	0.9273433				
5, + 3	1.1826158	1.1314633	0.3075546				
5, + 5	0.8718260	0.4324933	9.0522820				
3, — 3	8.9651319	0.5671919	1.3964957	1.6463731	1.2873512		
3, — 1	0.3630719	1.3911006	1.8102299	1.7133199	1.0320787		
3, + 1	1.0320787	1.7133199	1.8102299	1.3911006	0.3630719		
3, + 3	1.2873512	1.6463731	1.3964957	0.5671919	8.9651319		
1, — 1	8.9317080	0.6129493	1.5549574	1.9809262	1.9528974	1.4580474	0.3788661
1, + 1	0.3788661	1.4580474	1.9528974	1.9809262	1.5549574	0.6129493	8.9317080
	$\underline{D_8}$						
8, — 8	9.2930986						
8, — 6	0.1961886						
8, — 4	0.7402566						
8, — 2	1.0412866						
8, 0	1.1381967						
8, + 2	1.0412866						
etc.							
6, — 6	9.0200973	0.4672555	0.9791388				
6, — 4	0.3423167	1.2454066	1.3837093				
6, — 2	1.0412866	1.6433466	1.5184079				
6, 0	1.4092634	1.7682854	1.4092634				
6, + 2	1.5184079	1.6433466	1.0412866				
etc.							
4, — 4	8.9273433	0.6085845	1.5250386	1.8718260	1.6219485		
4, — 2	0.4044646	1.5294033	2.0576771	2.0857058	1.5505926		
4, 0	1.1703814	1.9765613	2.2195993	1.9765613	1.1703814		
4, + 2	1.5505926	2.0857058	2.0576771	1.5294033	0.4044646		
4, + 4	1.6219485	1.8718260	1.5250386	0.6085845	8.9273433		
2, — 2	8.8859506	0.6641019	1.7152544	2.2661619	2.3842612	2.0655025	1.2081699
2, 0	0.4300186	1.6341387	2.2751167	2.4792367	2.2751167	1.6341387	0.4300186
2, + 2	1.2081699	2.0655025	2.3842612	2.2661619	1.7152544	0.6641019	8.8859506
0, 0	8.8737160	0.6798961	1.7680322	2.3700922	2.5639122	2.3700922	etc.

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^{\frac{0}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{2}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{4}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{6}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{8}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{10}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{12}{2}} J$
	D_9						
9, — 9	9.2682750						
9, — 7	0.2225175						
9, — 5	0.8245775						
9, — 3	1.1925543						
9, — 1	1.3686456						
etc.							
7, — 7	8.9920686	0.4972186	1.0712499				
7, — 5	0.3722799	1.3423166	1.5531700				
7, — 3	1.1381966	1.8194378	1.7816493				
7, — 1	1.5853546	2.0412866	1.7914092				
7, + 1	1.7914092	2.0412866	1.5853546				
etc.							
5, — 5	8.8951586	0.6433468	1.6323514	2.0583201	1.8955927		
5, — 3	0.4392267	1.6433468	2.2587706	2.3837093	1.9577406		
5, — 1	1.2843247	2.1874146	2.5395972	2.4214979	1.7614460		
5, + 1	1.7614460	2.4214979	2.5395972	2.1874146	1.2843247		
etc.							
3, — 3	8.8481620	0.7054946	1.8437973	2.4916148			
3, — 1	0.4714113	1.7724414	2.5225639	2.8516226			
3, + 1	1.3464726	2.3287439	2.7936306	2.8516226	etc.		
3, + 3	1.8138340	2.5250385	2.7188585	2.4916148			
1, — 1	8.8279586	0.7310487	1.9283292	2.6553279	2.9952760		
1, + 1	0.4811711	1.8102300	2.5973360	2.9775472	2.9952760	etc.	
	D_{10}						
10, — 10	9.24600						
10, — 8	0.24600						
10, — 6	0.89921						
10, — 4	1.32518						
10, — 2	1.56822						
10, 0	1.64740						
etc.							
8, — 8	8.96725	0.52355	1.15194				
8, — 6	0.39861	1.42664	1.69964				
8, — 4	1.22252	1.97071	2.00546				
8, — 2	1.73662	2.27173	2.10901				
8, 0	2.02186	2.36865	2.02186				
etc.							
6, — 6	8.86713	0.67331	1.72446	2.21738	2.12720		
6, — 4	0.46919	1.74026	2.42823	2.63235	2.29353		
6, — 2	1.38124	2.36351	2.80284	2.78165	2.23074		
6, 0	1.93754	2.69450	2.92174	2.69450	1.93754		
etc.							
4, — 4	8.81599	0.74027	1.95111	2.67811			
4, — 2	0.50618	1.88639	2.72366	3.14963			
4, 0	1.46042	2.53960	3.11363	3.29656	etc.		
4, + 2	2.02469	2.86083	3.20078	3.14963			
4, + 4	2.29354	2.89559	2.99250	2.67811			
2, — 2	8.79017	0.77244	2.05687	2.88078	3.32987		
2, 0	0.52256	1.94853	2.84478	3.34993	3.51379	etc.	
2, + 2	1.48477	2.59198	3.20300	3.43708	3.32987		
0, 0	8.78220	0.78220	2.08862	2.94056	3.42664	3.58500	etc.

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^{\frac{0}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{2}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{4}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{6}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{8}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{10}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{12}{2}} J$
	$\underline{D_{11}}$						
11, — 11	9.22580						
11, — 9	0.26719						
11, — 7	0.96616						
11, — 5	1.44328						
11, — 3	1.74431						
11, — 1	1.89044						
etc.							
9, — 9	8.94497	0.54703	1.22372				
9, — 7	0.42209	1.50127	1.82863				
9, — 5	1.29715	2.10333	2.20024				
9, — 3	1.86925	2.47131	2.38113				
9, — 1	2.22143	2.64740	2.38776				
etc.							
7, — 7	8.84231	0.69964	1.80515	2.35606	2.32803		
7, — 5	0.49552	1.82458	2.57470	2.84577	2.57949		
7, — 3	1.46556	2.51478	3.02665	3.08464	2.62089		
7, — 1	2.08880	2.92494	3.23934	3.10901	2.46119		
etc.							
5, — 5	8.78795	0.77022	2.04322	2.83717	3.22411	3.20638	2.69148
5, — 3	0.53614	1.98330	2.89312	3.39827	3.53657	3.29353	2.56654
5, — 1	1.55733	2.71569	3.37687	3.65671	3.58292	3.13383	2.20078
etc.							
3, — 3	8.75800	0.80722	2.16419	3.06728	3.60352		
3, — 1	0.55733	2.06248	3.04588	3.64794	3.92094		
3, + 1	1.59872	2.80284	3.52300	3.88202	3.92094	etc.	
3, + 3	2.23555	3.19663	3.68271	3.80764	3.60352		
1, — 1	8.74441	0.82359	2.21716	3.16601	3.76123	4.04453	
1, + 1	0.56395	2.08683	3.09222	3.72231	4.03230	4.04453	etc.
	$\underline{D_{12}}$						
12, — 12	9.20731						
12, — 10	0.28649						
12, — 8	1.02686						
12, — 6	1.54973						
12, — 4	1.90192						
12, — 2	2.10604						
12, 0	2.17298						
etc.							
10, — 10	8.92477	0.56822	1.28838				
10, — 8	0.44328	1.56822	1.94388				
10, — 6	1.36410	2.22143	2.37270				
10, — 4	1.98735	2.64740	2.61937				
10, — 2	2.39752	2.89044	2.70335				
10, 0	2.63080	2.96962	2.63080				
etc.							
8, — 8	8.82003	0.72312	1.87693	2.47899	2.50532		
8, — 6	0.51900	1.89921	2.70369	3.03275	2.82863		
8, — 4	1.54019	2.64740	3.22143	3.34637	2.95516		
8, — 2	2.22143	3.12452	3.51146	3.46031	2.89964		
8, 0	2.66076	3.38776	3.60524	3.38776	2.66076		
etc.							

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^{0\frac{1}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{2\frac{1}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{4\frac{1}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{6\frac{1}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{8\frac{1}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{10\frac{1}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{12\frac{1}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{14\frac{1}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{16\frac{1}{2}} J$
	$D_{1,2}$								
6, — 6	8.76313	0.79655	2.12391	2.97585	3.42494	3.47416	3.03179		
6, — 4	0.56247	2.06762	3.03959	3.61169	3.82253	3.65869	3.01884		
6, — 2	1.64165	2.86696	3.60068	3.95970	3.97307	3.62090	2.79699		
6, 0	2.35204	3.36427	3.90052	4.07123	3.90052	3.36427	2.35204		
etc.									
4, — 4	8.72996	0.83717	2.25630	3.22634	3.83513	4.11843	4.08064	3.69148	2.83954
4, — 2	0.58729	2.15939	3.21534	3.89658	4.25673	4.31473	4.06485	3.46963	2.41164
4, 0	1.69563	2.97893	3.78624	4.24217	4.39023	4.24217	3.78624	2.97893	1.69563
etc.									
2, — 2	8.71224	0.85837	2.32448	3.35251	4.03488	4.41509			
2, 0	0.59872	2.20078	3.29332	4.02032	4.43945	4.57662	etc.		
2, + 2	1.71266	3.01369	3.84300	4.32696	4.51201	4.41509			
0, 0	8.70662	0.86498	2.34570	3.39146	4.09582	4.50406	4.63796	etc.	
	$D_{1,3}$								
13, — 13	9.19028								
13, — 11	0.30422								
13, — 9	1.08237								
13, — 7	1.64664								
13, — 5	2.04458								
13, — 3	2.29986								
13, — 1	2.42480								
etc.									
11, — 11	8.90628	0.58752	1.34719						
11, — 9	0.46258	1.62891	2.04805						
11, — 7	1.42480	2.32789	2.52745						
11, — 5	2.09380	2.80500	2.83134						
11, — 3	2.55513	3.10604	2.98110						
11, — 1	2.84640	3.25217	2.98589						
etc.									
9, — 9	8.79983	0.74431	1.94159	2.58941	2.66404				
9, — 7	0.54019	1.96616	2.81894	3.19915	3.04939				
9, — 5	1.60714	2.76550	3.39389	3.57682	3.24776				
9, — 3	2.33953	3.30061	3.74970	3.76550	3.27738				
9, — 1	2.83685	3.63080	3.92083	3.78253	3.14268				
etc.									
7, — 7	8.74085	0.82003	2.19569	3.09878	3.60223	3.70944	3.32923		
7, — 5	0.58595	2.14225	3.16858	3.79867	4.07167	3.97476	3.40746		
7, — 3	1.71628	2.99958	3.79546	4.22143	4.30734	4.03434	3.29759		
7, — 1	2.48467	3.56385	4.17264	4.42252	4.33897	3.89965	2.99656		
etc.									
5, — 5	8.70514	0.86350	2.33699	3.36502	4.03596	4.38621	4.42096	4.11097	3.34620
5, — 3	0.61362	2.24371	3.36181	4.11000	4.54269	4.67986	4.51715	4.01884	3.06999
5, — 1	1.77995	3.13020	4.01005	4.54516	4.78038	4.72924	4.38245	3.70007	2.56290
etc.									
3, — 3	8.68420	0.88832	2.41659	3.51157	4.26649	4.72588			
3, — 1	0.62868	2.29769	3.46278	4.26896	4.77524	5.00932	etc.		
3, + 1	1.80957	3.18978	4.10624	4.68711	4.98130	5.00932			
3, + 3	2.58773	3.74263	4.44699	4.82181	4.90995	4.72588			
1, — 1	8.67445	0.89976	2.45302	3.57796	4.36947	4.87462	5.11767	etc.	
1, + 1	0.63348	2.31472	3.49441	4.31832	4.84660	5.10871	5.11767		

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg} \frac{0\frac{1}{2}J}{2}$	$- \operatorname{tg} \frac{2\frac{1}{2}J}{2}$	$+ \operatorname{tg} \frac{4\frac{1}{2}J}{2}$	$- \operatorname{tg} \frac{6\frac{1}{2}J}{2}$	$+ \operatorname{tg} \frac{8\frac{1}{2}J}{2}$	$- \operatorname{tg} \frac{10\frac{1}{2}J}{2}$	$+ \operatorname{tg} \frac{12\frac{1}{2}J}{2}$	$- \operatorname{tg} \frac{14\frac{1}{2}J}{2}$	$+ \operatorname{tg} \frac{16\frac{1}{2}J}{2}$
	$D_{1,2}$								
14, — 14	9.17448								
14, — 12	0.32061								
14, — 10	1.13353								
14, — 8	1.73559								
14, — 6	2.17492								
14, — 4	2.47595								
14, — 2	2.65204								
14, 0	2.71003								
etc.									
12, — 12	8.88925	0.60525	1.40113						
12, — 10	0.48031	1.68443	2.14307						
12, — 8	1.48031	2.42479	2.66783						
12, — 6	2.19071	2.94767	3.02230						
12, — 4	2.69779	3.29985	3.22928						
12, — 2	3.04022	3.50398	3.29986						
12, 0	3.23771	3.57093	3.23771						
etc.									
10, — 10	8.78134	0.76361	2.00040	2.68961	2.80772				
10, — 8	0.55949	2.02685	2.92311	3.34908	3.24761				
10, — 6	1.66784	2.87196	3.54864	3.78272	3.50803				
10, — 4	2.44598	3.45821	3.96167	4.03546	3.60949				
10, — 2	2.99446	3.84640	4.19858	4.12722	3.55992				
10, 0	3.35828	4.06508	4.27592	4.06508	3.35828				
etc.									
8, — 8	8.72065	0.84122	2.26035	3.20920	3.76095	3.91931	3.59346		
8, — 6	0.60714	2.20920	3.28383	3.96507	4.29243	4.25352	3.74836		
8, — 4	1.78323	3.11768	3.96792	4.45188	4.59994	4.39389	3.72968		
8, — 2	2.60277	3.73994	4.41088	4.72771	4.71671	4.35657	3.54063		
8, 0	3.17265	4.14269	4.65456	4.81729	4.65456	4.14269	3.17265		
etc.									
6, — 6	8.68286	0.88698	2.40877	3.48795	4.21325	4.62149	4.71840	4.47536	3.78313
6, — 4	0.63710	2.31834	3.49080	4.29698	4.79183	4.99595	4.90577	4.48664	3.62495
6, — 2	1.85458	3.26282	4.20483	4.80689	5.11465	5.14269	4.88305	4.29759	3.26956
6, 0	2.69553	3.89965	4.65457	5.08054	5.21883	5.08054	4.65457	3.89965	2.69553
etc.									
4, — 4	8.65938	0.91465	2.49728	3.65025	4.46732	4.99366			
4, — 2	0.65501	2.38201	3.60925	4.48238	5.06120	5.37446			
4, 0	1.89389	3.34105	4.33005	4.99010	5.37145	5.49639	etc.		
4, + 2	2.73899	3.97307	4.76459	5.23632	5.43360	5.37446			
4, + 4	3.30044	4.34620	4.95365	5.24132	5.25026	4.99366			
2, — 2	8.64641	0.92971	2.54513	3.73702	4.60108	5.18541	5.51561		
2, 0	0.66344	2.41163	3.66387	4.56696	5.18239	5.54141	5.65952	etc.	
2, + 2	1.90648	3.36587	4.36948	5.04726	5.45059	5.60356	5.51561		
0, 0	8.64225	0.93451	2.56034	3.76446	4.64312	5.24518	5.59738	5.71336	etc.
	$D_{1,5}$								
15, — 15	9.15976								
15, — 13	0.33585								
15, — 11	1.18095								
15, — 9	1.81777								
15, — 7	2.29490								
15, — 5	2.63732								
15, — 3	2.85917								
15, — 1	2.96831								
etc.									

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^{\frac{0}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{2}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{4}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{6}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{8}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{10}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{12}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{14}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{16}{2}} J$
	D_{15}								
13, — 13	8.87345	0.62164	1.45094						
13, — 11	0.49670	1.73558	2.23044						
13, — 9	1.53147	2.51374	2.79629						
13, — 7	2.27966	3.07801	3.19611						
13, — 5	2.82813	3.47595	3.45367						
13, — 3	3.21631	3.73122	3.58146						
13, — 1	3.46495	3.85616	3.58509						
etc.									
11, — 11	8.76431	0.78134	2.05434	2.78134	2.93895				
11, — 9	0.57722	2.08237	3.01813	3.48549	3.42750				
11, — 7	1.72335	2.96886	3.68902	3.96886	3.74246				
11, — 5	2.54289	3.60088	4.15263	4.27757	3.90597				
11, — 3	3.13712	4.04021	4.44676	4.43340	3.92825				
11, — 1	3.55210	4.31689	4.58989	4.44599	3.81174				
etc.									
9, — 9	8.70216	0.86052	2.31916	3.30940	3.90463	4.10875	3.83119		
9, — 7	0.62644	2.26989	3.38800	4.11500	4.49065	4.50288	4.05210		
9, — 5	1.84393	3.22414	4.12267	4.65778	4.86021	4.71215	4.11009		
9, — 3	2.70922	3.89754	4.62285	4.99767	5.04882	4.75562	4.01222		
9, — 1	3.33026	4.35829	4.93231	5.16199	5.07180	4.63912	3.75623		
etc.									
7, — 7	8.66266	0.90817	2.47343	3.59837	4.37197	4.83136	4.98263	4.79758	4.16749
7, — 5	0.65829	2.38529	3.60605	4.46338	5.01259	5.27470	5.24667	4.89449	4.10535
7, — 3	1.92153	3.38092	4.37729	5.03734	5.40725	5.50223	5.31514	4.80886	3.86799
7, — 1	2.81363	4.07574	4.89281	5.38573	5.59657	5.53745	5.19864	4.54063	3.44565
etc.									
5, — 5	8.63710	0.93813	2.56906	3.77318	4.64461	5.22894			
5, — 3	0.67849	2.45664	3.73824	4.66936	5.31034	5.69055			
5, — 1	1.96852	3.47367	4.52483	5.25183	5.70572	5.90984			
5, + 1	2.87162	4.17265	5.03671	5.58762	5.87205	5.90984	etc.		
5, + 3	3.50001	4.62495	5.31955	5.70413	5.82222	5.69055			
5, + 5	3.90370	4.86231	5.39058	5.60570	5.54770	5.22894			
3, — 3	8.62159	0.95604	2.62582	3.87570	4.80191	5.45319	5.85592		
3, — 1	0.68977	2.49595	3.81034	4.78038	5.46835	5.90655	6.11182		
3, + 1	1.99080	3.51714	4.59329	5.35025	5.84074	6.09062	6.11182	etc.	
3, + 3	2.89025	4.20351	5.08219	5.65083	5.95725	6.02307	5.85592		
1, — 1	8.61424	0.96449	2.65245	3.92352	4.87473	5.55597	5.99532	6.20821	
1, + 1	0.69342	2.50856	3.83334	4.81561	5.51819	5.97412	6.20137	6.20821	etc.
	D_{16}								
16, — 16	9.14597								
16, — 14	0.35009								
16, — 12	1.22515								
16, — 10	1.89416								
16, — 8	2.40604								
16, — 6	2.78626								
16, — 4	3.04950								
16, — 2	3.20440								
16, 0	3.25555								
etc.									

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \lg \frac{0}{2}J$	$- \lg \frac{2}{2}J$	$+ \lg \frac{4}{2}J$	$- \lg \frac{6}{2}J$	$+ \lg \frac{8}{2}J$	$- \lg \frac{10}{2}J$	$+ \lg \frac{12}{2}J$	$- \lg \frac{14}{2}J$	$+ \lg \frac{16}{2}J$
	D_{16}								
14, — 14	8.85873	0.63688	1.49722						
14, — 12	0.51194	1.78301	2.31129						
14, — 10	1.57889	2.59592	2.91468						
14, — 8	2.36184	3.19798	3.35559						
14, — 6	2.94810	3.63731	3.65851						
14, — 4	3.37768	3.93835	3.83689						
14, — 2	3.67208	4.11444	3.89773						
14, 0	3.84337	4.17243	3.84337						
etc.									
12, — 12	8.74851	0.79773	2.10415	2.86591	3.05974				
12, — 10	0.59361	2.13352	3.10550	3.61065	3.59217				
12, — 8	1.77451	3.05781	3.81748	4.13871	3.95578				
12, — 6	2.63184	3.73122	4.32644	4.49714	4.17383				
12, — 4	3.26746	4.21631	4.67115	4.70894	4.25815				
12, — 2	3.72819	4.54414	4.87149	4.78558	4.21348				
12, 0	4.03898	4.73222	4.93727	4.73122	4.03898				
etc.									
10, — 10	8.68513	0.87825	2.37310	3.40113	4.03586	4.28137	4.04729		
10, — 8	0.64417	2.32541	3.48302	4.25141	4.67054	4.72854	4.32604		
10, — 6	1.89944	3.32104	4.26305	4.84392	5.09464	4.99773	4.45004		
10, — 4	2.80613	4.04021	4.81383	5.23979	5.34530	5.11009	4.42885		
10, — 2	3.47292	4.55210	5.18049	5.46816	5.44013	5.07438	4.26404		
10, 0	3.95005	4.89093	5.38577	5.54290	5.38577	4.89092	3.95005		
etc.									
8, — 8	8.64417	0.92747	2.53224	3.69857	4.51565	5.02080	5.22036	5.08646	4.51074
8, — 6	0.67759	2.44598	3.71022	4.61331	5.21081	5.52407	5.55041	5.25622	4.52922
8, — 4	1.98223	3.48738	4.53204	5.24324	5.66752	5.82049	5.69555	5.25622	4.38789
8, — 2	2.92008	4.23334	5.10478	5.65569	5.92868	5.93651	5.67023	5.09140	4.08359
8, 0	3.60326	4.75623	5.47639	5.88216	6.01381	5.88215	5.47639	4.75623	3.60326
etc.									
6, — 6	8.61690	0.95932	2.63372	3.88360	4.80333	5.43881			
6, — 4	0.69968	2.52359	3.85349	4.83576	5.53110	5.96930			
6, — 2	2.03547	3.59177	4.69729	5.48228	5.99832	6.26939			
6, 0	2.98972	4.34874	5.27495	5.89281	6.24979	6.36676	etc.		
6, + 2	3.67610	4.86799	5.63514	6.09890	6.30414	6.26939			
6, + 4	4.14674	5.18453	5.79995	6.11198	6.16312	5.96930			
6, + 6	4.42756	5.31362	5.77494	5.92791	5.81193	5.43881			
4, — 4	8.59931	0.97952	2.69760	3.99863	4.97920	5.68847	6.15336		
4, — 2	0.71325	2.57058	3.93933	4.96736	5.71749	6.22264	6.50044		
4, 0	2.06543	3.64976	4.78807	5.61198	6.17501	6.50407	6.61242	etc.	
4, + 2	3.02288	4.40309	5.35431	6.00213	6.39570	6.55843	6.50044		
4, + 4	3.69958	4.90370	5.68545	6.16694	6.39418	6.38745	6.15336		
2, — 2	8.58940	0.99080	2.73314	4.06220	5.07556	5.82375	6.33563	6.62770	
2, 0	0.71975	2.59288	3.97981	5.02903	5.80415	6.33926	6.65367	6.75742	etc.
2, + 2	2.07512	3.66941	4.81711	5.65325	6.23090	6.57769	6.70803	6.62770	
0, 0	8.58620	0.99444	2.74456	4.08258	5.10634	5.86676	6.39326	6.70306	6.80536

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{5}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{9}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{11}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{13}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{15}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{17}{2}} J$
	D_{17}								
17, — 17	9.13301								
17, — 15	0.36346								
17, — 13	1.26655								
17, — 11	1.96552								
17, — 9	2.50958								
17, — 7	2.92456								
17, — 5	3.22559								
17, — 3	3.42188								
17, — 1	3.51879								
etc.									
15, — 15	8.84494	0.65112	1.54042						
15, — 13	0.52618	1.82721	2.38652						
15, — 11	1.62309	2.67231	3.02449						
15, — 9	2.43823	3.30913	3.50295						
15, — 7	3.05925	3.78625	3.84696						
15, — 5	3.52662	4.12868	4.07069						
15, — 3	3.86241	4.35053	4.18212						
15, — 1	4.07946	4.45967	4.18497						
etc.									
13, — 13	8.73379	0.81297	2.15043	2.94438	3.17162				
13, — 11	0.60885	2.18095	3.18634	3.72625	3.74398				
13, — 9	1.82193	3.13999	3.93587	4.29489	4.15147				
13, — 7	2.71402	3.85119	4.48592	4.69801	4.41818				
13, — 5	3.38743	4.37767	4.87599	4.95954	4.55705				
13, — 3	3.88956	4.75126	5.12692	5.09216	4.57442				
13, — 1	4.24611	4.98950	5.24991	5.10185	4.47176				
etc.									
11, — 11	8.66933	0.89464	2.42291	3.48570	4.15665	4.43995	4.24538		
11, — 9	0.66056	2.37656	3.57039	4.37657	4.83521	4.93459	4.57557		
11, — 7	1.95060	3.40999	4.39151	5.01377	5.30796	5.25681	4.75741		
11, — 5	2.89508	4.17055	4.98762	5.45935	5.61316	5.42910	4.80222		
11, — 3	3.60326	4.72820	5.40488	5.74370	5.77003	5.46227	4.71408		
11, — 1	4.12614	5.11817	5.66737	5.88249	5.78751	5.35961	4.49128		
etc.									
9, — 9	8.62714	0.94520	2.58618	3.79030	4.64688	5.19342	4.43645	4.34831	4.82089
9, — 7	0.69532	2.50150	3.80524	4.74972	5.39070	5.74972	5.82435	5.58131	4.90868
9, — 5	2.03774	3.58428	4.67242	5.42938	5.90195	6.10607	6.03550	5.65416	4.84798
9, — 3	3.01699	4.37601	5.29574	5.89780	6.22516	6.29098	6.08686	5.57498	4.63971
9, — 1	3.74592	4.95004	5.72457	6.18833	6.38214	6.31742	5.98420	5.34322	4.27741
etc.									
7, — 7	8.59841	0.97862	2.69253	3.98380	4.94700	5.62824			
7, — 5	0.71898	2.58428	3.95766	4.98569	5.72932	6.21867			
7, — 3	2.09617	3.69823	4.85204	5.68818	6.25859	6.58765			
7, — 1	3.09617	4.50634	5.48692	6.16277	6.58190	6.76582			
7, + 1	3.83371	5.08359	5.91289	6.44360	6.72138	6.76582	etc.		
7, + 3	4.36234	5.46708	6.15504	6.54625	6.68455	6.58765			
7, + 5	4.71010	5.67534	6.22382	6.47370	6.46686	6.21867			
7, + 7	4.89095	5.71486	6.11819	6.21681	6.04966	5.62824			
5, — 5	8.57911	1.00071	2.76226	4.10905	5.13792	5.89834	6.41759		
5, — 3	0.73444	2.63753	4.05458	5.13376	5.93825	6.50139	6.84134		
5, — 1	2.13238	3.76786	4.96053	5.84243	6.46761	6.86362	7.04451		
5, + 1	3.14098	4.57918	5.59255	6.30732	6.77344	7.01535	7.04451	etc.	
5, + 3	3.87567	5.14674	6.00104	6.56171	6.87610	6.96628	6.84134		
5, + 5	4.38977	5.50674	6.20931	6.61825	6.77855	6.70967	6.41759		

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^0 \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^6 \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^{10} \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^{12} \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^{14} \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^{16} \frac{1}{2} J$
	D_{17}								
3, - 3	8.56714	1.01428	2.80492	4.18513	5.25285	6.05903	6.63307	6.99209	etc.
3, - 1	0.74323	2.66751	4.10880	5.21601	6.05329	6.65535	7.04229	7.22522	
3, + 1	2.14977	3.80105	5.01189	5.91498	6.56517	6.99115	7.20863	7.22522	
3, + 3	3.15552	4.60268	5.62644	6.35344	6.83416	7.09380	7.14496	6.99209	
1, - 1	8.56138	1.02077	2.82525	4.22126	5.30717	6.13454	6.73357	7.12255	7.31202
1, + 1	0.74607	2.67719	4.12628	5.24245	6.09011	6.70440	7.10597	7.30663	7.31202
	D_{18}								
18, - 18	9.1208								
18, - 16	0.3761								
18, - 14	1.3055								
18, - 12	2.0325								
18, - 10	2.6065								
18, - 8	3.0537								
18, - 6	3.3894								
18, - 4	3.6235								
18, - 2	3.7618								
18, 0	3.8076								
etc.									
16, - 16	8.8320	0.6645	1.5809						
16, - 14	0.5396	1.8686	2.4569						
16, - 12	1.6645	2.7437	3.1269						
16, - 10	2.5096	3.4127	3.6399						
16, - 8	3.1628	3.9246	4.0215						
16, - 6	3.6649	4.3048	4.2863						
16, - 4	4.0385	4.5680	4.4431						
16, - 2	4.2969	4.7229	4.4965						
16, 0	4.4482	4.7741	4.4482						
etc.									
14, - 14	8.7200	0.8272	2.1936	3.0175	3.2758				
14, - 12	0.6231	2.2252	3.2616	3.8337	3.8848				
14, - 10	1.8661	3.2164	4.0457	4.4395	4.3323				
14, - 8	2.7904	3.9624	4.6333	4.8832	4.6428				
14, - 6	3.4986	4.5266	5.0644	5.1894	4.8304				
14, - 4	4.0385	4.9416	5.3607	5.3717	4.9023				
14, - 2	4.4364	5.2256	5.5343	5.4374	4.8617				
14, 0	4.7079	5.3891	5.5915	5.3891	4.7079				
etc.									
12, - 12	8.6546	0.9099	2.4692	3.5642	4.2685	4.5866	4.4282		
12, - 10	0.6758	2.4240	3.6512	4.4922	4.9870	5.1242	4.8047		
12, - 8	1.9980	3.4922	4.5099	5.1700	5.5037	5.4939	5.0380		
12, - 6	2.9773	4.2905	5.1471	5.6602	5.8575	5.7192	5.1406		
12, - 4	3.7232	4.8896	5.6097	5.9943	6.0689	5.8123	5.1185		
12, - 2	4.2875	5.3253	5.9228	6.1891	6.1485	5.7785	4.9724		
12, 0	4.6984	5.6179	6.1002	6.2531	6.1002	5.6179	4.6984		
etc.									
10, - 10	8.6113	0.9616	2.6360	3.8749	4.7677	5.3520	5.6346	5.5878	

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+tg^{0\frac{1}{2}}J$	$-tg^{2\frac{1}{2}}J$	$+tg^{4\frac{1}{2}}J$	$-tg^{6\frac{1}{2}}J$	$+tg^{8\frac{1}{2}}J$	$-tg^{10\frac{1}{2}}J$	$+tg^{12\frac{1}{2}}J$	$-tg^{14\frac{1}{2}}J$	$+tg^{16\frac{1}{2}}J$	$-tg^{18\frac{1}{2}}J$	$+tg^{20\frac{1}{2}}J$
	D_{19}										
13, — 13	8.6408	0.9241	2.5124	3.6373	4.3727	4.7230	4.5980				
13, — 11	0.6900	2.4682	3.7265	4.5996	5.1279	5.2998	5.0165				
13, — 9	2.0422	3.5686	4.6197	5.3145	5.6844	5.7125	5.2961				
13, — 7	3.0537	4.4017	5.2945	5.8454	6.0822	5.9853	5.4502				
13, — 5	3.8344	5.0385	5.7982	6.2241	6.3422	6.1314	5.4859				
13, — 3	4.4365	5.5156	6.1566	6.4686	6.4763	6.1576	5.4057				
13, — 1	4.8887	5.8540	6.3845	6.5887	6.4901	6.0658	5.2085				
etc.											
11, — 11	8.5966	0.9768	2.6823	3.9533	4.8796	5.4986	5.8174	5.8084	5.3640		
11, — 9	0.7270	2.6001	3.9735	4.9905	5.7072	6.1454	6.3030	6.1471	5.5662		
11, — 7	2.1363	3.7554	4.9193	5.7554	6.3110	6.6022	6.6234	6.3390	5.6355		
11, — 5	3.1881	4.6263	5.6290	6.3182	6.7374	6.9001	6.7986	6.3959	5.5771		
11, — 3	3.9962	5.2875	6.1538	6.7145	7.0109	7.0554	6.8387	6.3226	5.3915		
11, — 1	4.6149	5.7776	6.5212	6.9636	7.1448	7.0759	6.7469	6.1185	5.0741		
etc.											
9, — 9	8.5656	1.0127	2.7963	4.1601	5.1990	5.9595	6.4639	6.7181	6.7113	6.4049	5.6836
9, — 7	0.7531	2.6910	4.1401	5.2473	6.0739	6.6504	6.9903	7.0941	6.9469	6.5075	5.6588
9, — 5	2.2028	3.8841	5.1209	6.0442	6.7063	7.1323	7.3319	7.3027	7.0280	6.4650	5.4949
9, — 3	3.2820	4.7794	5.8517	6.6245	7.1462	7.4393	7.5114	7.3585	6.9625	6.2793	5.1892
9, — 1	4.1067	5.4535	6.3855	7.0253	7.4196	7.5890	7.5398	7.2668	6.7506	5.9461	4.7323
etc.											
7, — 7	8.5436	1.0377	2.8750	4.3010	5.4128	6.2604	6.8714				
7, — 5	0.7715	2.7537	4.2538	5.4201	6.3164	6.9764	7.4190				
7, — 3	2.2486	3.9712	5.2557	6.2345	6.9623	7.4675	7.7649				
7, — 1	3.3443	4.8795	5.9955	6.8194	7.4020	7.7689	7.9327	etc.			
7, + 1	4.1759	5.5562	6.5270	7.2126	7.6617	7.8980	7.9327				
7, + 3	4.7992	6.0411	6.8784	7.4334	7.7534	7.8606	7.7649				
7, + 5	5.2445	6.3558	7.0640	7.4900	7.6794	7.6531	7.4190				
7, + 7	5.5285	6.5107	7.0884	7.3808	7.4319	7.2604	6.8714				
5, — 5	8.5284	1.0548	2.9284	4.3958	5.5553	6.4583	7.1350	7.6032			
5, — 3	0.7837	2.7951	4.3282	5.5323	6.4723	7.1835	7.6869	7.9948			
5, — 1	2.2774	4.0256	5.3391	6.3513	7.1180	7.6690	8.0211	8.1839	etc.		
5, + 1	3.3801	4.9364	6.0767	6.9286	7.5440	7.9498	8.1606	8.1839			
5, + 3	4.2094	5.6054	6.5944	7.3012	7.7753	8.0415	8.1129	7.9948			
5, + 5	4.8210	6.0719	6.9195	7.4868	7.8214	7.9464	7.8726	7.6032			
3, — 3	8.5189	1.0654	2.9617	4.4546	5.6432	6.5797	7.2952	7.8092	8.1333		
3, — 1	0.7907	2.8188	4.3705	5.5958	6.5600	7.2992	7.8355	8.1823	8.3474	etc.	
3, + 1	2.2913	4.0518	5.3791	6.4072	7.1920	7.7641	8.1413	8.3340	8.3474		
3, + 3	3.3917	4.9549	6.1029	6.9638	7.5896	8.0076	8.2331	8.2741	8.1333		
1, — 1	8.5143	1.0706	2.9777	4.4829	5.6853	6.6376	7.3713	7.9064	8.2556	8.4263	etc.
1, + 1	0.7930	2.8265	4.3843	5.6164	6.5884	7.3366	7.8832	8.2422	8.4219	8.4263	
	D_{20}										
20, — 20	9.0982										
20, — 18	0.3992										
20, — 16	1.3769										
20, — 14	2.1551										
20, — 12	2.7835										
20, — 10	3.2886										
20, — 8	3.6866										
20, — 6	3.9876										
20, — 4	4.1985										
20, — 2	4.3234										
20, 0	4.3648										
etc.											

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^{\frac{0}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{2}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{4}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{6}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{8}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{10}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{12}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{14}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{16}{2}} J$	$- \operatorname{tg}^{\frac{18}{2}} J$	$+ \operatorname{tg}^{\frac{20}{2}} J$
	D_{20}										
18, — 18	8.8082	0.6890	1.6551								
18, — 16	0.5640	1.9443	2.5852								
18, — 14	1.7401	2.8737	3.3130								
18, — 12	2.6396	3.6007	3.8879								
18, — 10	3.3508	4.1747	4.3361								
18, — 8	3.9151	4.6219	4.6730								
18, — 6	4.3556	4.9576	4.9084								
18, — 4	4.6866	5.1917	5.0483								
18, — 2	4.9170	5.3300	5.0960								
18, 0	5.0525	5.3758	5.0525								
etc.											
16, — 16	8.6948	0.8532	2.2723	3.1506	3.4650						
16, — 14	0.6491	2.3055	3.3980	4.0281	4.1392						
16, — 12	1.9464	3.3547	4.2440	4.6999	4.6572						
16, — 10	2.9287	4.1628	4.8982	5.2150	5.0443						
16, — 8	3.6990	4.7940	5.4015	5.5990	5.3157						
16, — 6	4.3059	5.2815	5.7764	5.8666	5.4801						
16, — 4	4.7764	5.6447	6.0364	6.0267	5.5427						
16, — 2	5.1270	5.8954	6.1896	6.0841	5.5055						
16, 0	5.3679	6.0406	6.2402	6.0406	5.3679						
etc.											
14, — 14	8.6279	0.9375	2.5529	3.7059	4.4702	4.8505	4.7566				
14, — 12	0.7034	2.5096	3.7968	4.6999	5.2592	5.4633	5.2135				
14, — 10	2.0836	3.6399	4.7221	5.4491	5.8524	5.9152	5.5350				
14, — 8	3.1250	4.5052	5.4314	6.0171	6.2901	6.2310	5.7354				
14, — 6	3.9379	5.1768	5.9727	6.4364	6.5941	6.4246	5.8225				
14, — 4	4.5748	5.6917	6.3722	6.7256	6.7768	6.5038	5.8003				
14, — 2	5.0648	6.0715	6.6455	6.8954	6.8451	6.4719	5.6690				
14, 0	5.4259	6.3290	6.8016	6.9514	6.8016	6.3290	5.4259				
etc.											
12, — 12	8.5828	0.9911	2.7255	4.0265	4.9838	5.6350	5.9872	6.0130	5.6048		
12, — 10	0.7412	2.6443	4.0487	5.0979	5.8480	6.3210	6.5148	6.3967	5.8554		
12, — 8	2.1805	3.8318	5.0291	5.9000	6.4917	6.8208	6.8815	6.6385	5.9784		
12, — 6	3.2645	4.7375	5.7764	6.5034	6.9620	7.1662	7.1082	6.7512	5.9807		
12, — 4	4.1074	5.4364	6.3423	6.9443	7.2843	7.3744	7.2060	6.7411	5.8644		
12, — 2	4.7638	5.9679	6.7550	7.2432	7.4727	7.4550	7.1803	6.6099	5.6276		
12, 0	5.2644	6.3546	7.0313	7.4115	7.5347	7.4115	7.0313	6.3546	5.2644		
etc.											
10, — 10	8.5509	1.0280	2.8426	4.2386	5.3109	6.1061	6.6467	6.9388	6.9714	6.7064	6.0286
10, — 8	0.7683	2.7384	4.2209	5.3629	6.2257	6.8400	7.2194	7.3646	7.2608	6.8673	6.0668
10, — 6	2.2503	3.9663	5.2393	6.2004	6.9020	7.3694	7.6124	7.6290	7.4026	6.8908	5.9751
10, — 4	3.3642	4.8993	6.0112	6.8253	7.3906	7.7294	7.8498	7.7481	7.4064	6.7813	5.7532
10, — 2	4.2267	5.6149	6.5903	7.2759	7.7185	7.9390	7.9442	7.7292	7.2752	6.5376	5.3963
10, 0	4.8936	6.1533	7.0060	7.5733	7.9007	8.0079	7.9007	7.5733	7.0060	6.1533	4.8936
etc.											
8, — 8	8.5278	1.0541	2.9248	4.3856	5.5336	6.4190	7.0695				
8, — 6	0.7879	2.8049	4.3411	5.5453	6.4810	7.1825	7.6686				
8, — 4	2.2998	4.0602	5.3841	6.4043	7.1756	7.7265	8.0722				
8, — 2	3.4333	5.0098	6.1693	7.0390	7.6699	8.0879	8.3061				
8, 0	4.3063	5.7323	6.7514	7.4881	7.9916	8.2859	8.3828	etc.			
8, + 2	4.9753	6.2683	7.1600	7.7730	8.1552	8.3293	8.3061				
8, + 4	5.4717	6.6411	7.4114	7.9043	8.1663	8.2192	8.0722				
8, + 6	5.8137	6.8629	7.5131	7.8847	8.0230	7.9484	7.6686				
8, + 8	6.0110	6.9389	7.4654	7.7095	7.7149	7.4999	7.0695				

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+ \operatorname{tg}^0 \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^6 \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^8 \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^{10} \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^{12} \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^{14} \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^{16} \frac{1}{2} J$	$- \operatorname{tg}^{18} \frac{1}{2} J$	$+ \operatorname{tg}^{20} \frac{1}{2} J$
	D_{20}										
6, — 6	8.5114	1.0725	2.9823	4.4875	5.6865	6.6310	7.3511	7.8651			
6, — 4	0.8014	2.8507	4.4232	5.6688	6.6522	7.4091	7.9609	8.3199			
6, — 2	2.3329	4.1225	5.4795	6.5375	7.3525	7.9545	8.3611	8.5818			
6, 0	3.4770	5.0790	6.2676	7.1707	7.8405	8.3043	8.5773	8.6574	etc.		
6, + 2	4.3520	5.7992	6.8426	7.6074	8.1436	8.4768	8.6207	8.5818			
6, + 4	5.0148	6.3237	7.2335	7.8677	8.2749	8.4790	8.4924	8.3199			
6, + 6	5.4963	6.6746	7.4553	7.9605	8.2371	8.3077	8.1827	7.8651			
4, — 4	8.5004	1.0847	3.0205	4.5548	5.7869	6.7691	7.5330	8.0980	8.4766		
4, — 2	0.8100	2.8795	4.4747	5.7458	6.7582	7.5486	8.1392	8.5440	8.7713		
4, 0	2.3520	4.1582	5.5339	6.6131	7.4523	8.0824	8.5217	8.7814	8.8673	etc.	
4, + 2	3.4982	5.1125	6.3149	7.2338	7.9217	8.4067	8.7047	8.8248	8.7713		
4, + 4	4.3670	5.8210	6.8721	7.6459	8.1925	8.5380	8.6965	8.6753	8.4766		
2, — 2	8.4941	1.0918	3.0424	4.5933	5.8440	6.8475	7.6356	8.2287	8.6400	8.8776	
2, 0	0.8142	2.8934	4.4995	5.7828	6.8091	7.6153	8.2241	8.6501	8.9023	8.9859	etc.
2, + 2	2.3583	4.1699	5.5516	6.6376	7.4846	8.1237	8.5734	8.8453	8.9458	8.8776	
0, 0	8.4920	1.0941	3.0495	4.6058	5.8626	6.8729	7.6688	8.2708	8.6925	8.9424	9.0252

Tafel V.

u'	h^0	$-h^2$	h^4	$-h^6$	h^8	$-h^{10}$	h^{12}
0	0						
1	9.6989700						
2	9.5740313						
0	9.3979400	9.8750613					
3	9.4948500						
1	9.2730013	9.9719713					
4	9.4368580						
2	9.1938200	0.0389181					
0	9.1480626	0.1480626	0.2150093				
5	9.3911006						
3	9.1358280	0.0900706					
1	9.0688813	0.2150094	0.3911006				
6	9.3533120						
4	9.0900706	0.1314633					
2	9.0108893	0.2661619	0.5294033				
0	8.9897000	0.3119194	0.7890406	0.6543420			
7	9.3211273						
5	9.0522820	0.1662254					
3	8.9651319	0.3075546	0.6433466				
1	8.9317080	0.3630719	0.9273433	0.8651954			
8	9.2930986						
6	9.0200973	0.1961886					
4	8.9273433	0.3423167	0.7402566				
2	8.8859506	0.4044646	1.0412866	1.0412866			
0	8.8737160	0.4300186	1.1703814	1.4092634	1.1381967		
9	9.2682750						
7	8.9920686	0.2225175					
5	8.8951586	0.3722799	0.8245775				
3	8.8481620	0.4392267	1.1381966	1.1925543			
1	8.8279586	0.4714113	1.2843247	1.5853546	1.3686456		
10	9.24600						
8	8.96725	0.24600					
6	8.86713	0.39861	0.89921				
4	8.81599	0.46919	1.22252	1.32518			
2	8.79017	0.50618	1.38124	1.73662	1.56822		
0	8.78220	0.52256	1.46042	1.93754	2.02186	1.64740	
11	9.22580						
9	8.94497	0.26719					
7	8.84231	0.42209	0.96616				
5	8.78795	0.49552	1.29715	1.44328			
3	8.75800	0.53614	1.46556	1.86925	1.74431		
1	8.74441	0.55733	1.55733	2.08880	2.22143	1.89044	
12	9.20731						
10	8.92477	0.28649					
8	8.82003	0.44328	1.02686				
6	8.76313	0.51900	1.36410	1.54973			
4	8.72996	0.56247	1.54019	1.98735	1.90192		
2	8.71224	0.58729	1.64165	2.22143	2.39752	2.10604	
0	8.70662	0.59872	1.69563	2.35204	2.66076	2.63080	2.17298

Tafel V. (Fortsetzung.)

u'	h^0	$-h^2$	h^4	$-h^6$	h^8	$-h^{10}$	h^{12}	$-h^{14}$	h^{16}	$-h^{18}$
13	9.19028									
11	8.90628	0.30422								
9	8.79983	0.46258	1.08237							
7	8.74085	0.54019	1.42480	1.64664						
5	8.70514	0.58595	1.60714	2.09380	2.04458					
3	8.68420	0.61362	1.71628	2.33953	2.55513	2.29986				
1	8.67445	0.62868	1.77995	2.48467	2.83685	2.84640	2.42480			
14	9.17448									
12	8.88925	0.32061								
10	8.78134	0.48031	1.13353							
8	8.72065	0.55949	1.48031	1.73559						
6	8.68286	0.60714	1.66784	2.19071	2.17492					
4	8.65938	0.63710	1.78323	2.44598	2.69779	2.47595				
2	8.64641	0.65501	1.85458	2.60277	2.99446	3.04022	2.65202			
0	8.64225	0.66344	1.89398	2.69553	3.17265	3.35828	3.23771	2.71003		
15	9.15976									
13	8.87345	0.33585								
11	8.76431	0.49670	1.18095							
9	8.70216	0.57722	1.53147	1.81777						
7	8.66266	0.62644	1.72335	2.27966	2.29490					
5	8.63710	0.65829	1.84393	2.54289	2.82813	2.63732				
3	8.62159	0.67849	1.92153	2.70922	3.13712	3.21631	2.85917			
1	8.61424	0.68977	1.96852	2.81363	3.33026	3.55210	3.46495	2.96831		
16	9.14597									
14	8.85873	0.35009								
12	8.74851	0.51194	1.22515							
10	8.68513	0.59361	1.57889	1.89416						
8	8.64417	0.64417	1.77451	2.36184	2.40604					
6	8.61690	0.67759	1.89944	2.63184	2.94810	2.78626				
4	8.59931	0.69968	1.98223	2.80613	3.26746	3.37768	3.04950			
2	8.58940	0.71325	2.03547	2.92008	3.47292	3.72819	3.67208	3.20440		
0	8.58620	0.71975	2.06543	2.98972	3.60326	3.95005	4.03898	3.84337	3.25555	
17	9.13301									
15	8.84494	0.36346								
13	8.73379	0.52618	1.26655							
11	8.66933	0.60885	1.62309	1.96552						
9	8.62714	0.66056	1.82193	2.43823	2.50958					
7	8.59841	0.69532	1.95060	2.71402	3.05925	2.92456				
5	8.57911	0.71898	2.03774	2.89508	3.38743	3.52662	3.22559			
3	8.56714	0.73444	2.09617	3.01699	3.60326	3.88956	3.86241	3.42188		
1	8.56138	0.74323	2.13238	3.09617	3.74592	4.12614	4.24611	4.07946	3.51879	
18	9.12077									
16	8.83198	0.37605								
14	8.72000	0.53955	1.30546							
12	8.65461	0.62309	1.66449	2.03246						
10	8.61134	0.67580	1.86613	2.50959	2.60649					
8	8.58138	0.71171	1.99802	2.79041	3.16279	3.05365				
6	8.56062	0.73671	2.08890	2.97726	3.49858	3.66492	3.38944			
4	8.54692	0.75374	2.15168	3.10594	3.72323	4.03850	4.03850	3.62353		
2	8.53910	0.76442	2.19308	3.19308	3.87626	4.28751	4.43644	4.29694	3.76183	
0	8.53656	0.76955	2.21670	3.24743	3.97637	4.45350	4.69841	4.70785	4.44821	3.80759

Tafel V. (Fortsetzung.)

u'	h^0	$-h^2$	h^4	$-h^6$	h^8	$-h^{10}$	h^{12}	$-h^{14}$	h^{16}	$-h^{18}$	h^{20}
19	9.1092										
17	8.8197	0.3879									
15	8.7070	0.5521	1.3422								
13	8.6408	0.6365	1.7034	2.0955							
11	8.5966	0.6900	1.9075	2.5765	2.6976						
9	8.5656	0.7270	2.0422	2.8618	3.2597	3.1747					
7	8.5436	0.7531	2.1363	3.0537	3.6021	3.7940	3.5427				
5	8.5284	0.7715	2.2028	3.1881	3.8344	4.1768	4.2024	3.8115			
3	8.5189	0.7837	2.2486	3.2820	3.9962	4.4365	4.6125	4.4986	3.9876		
1	8.5143	0.7907	2.2774	3.3443	4.1067	4.6149	4.8887	4.9253	4.6913	4.0748	
20	9.0982										
18	8.8082	0.3992									
16	8.6948	0.5640	1.3769								
14	8.6279	0.6491	1.7401	2.1551							
12	8.5828	0.7034	1.9464	2.6396	2.7835						
10	8.5509	0.7412	2.0836	2.9287	3.3508	3.2886					
8	8.5278	0.7683	2.1805	3.1250	3.6990	3.9151	3.6866				
6	8.5114	0.7879	2.2503	3.2645	3.9379	4.3059	4.3556	3.9876			
4	8.5004	0.8014	2.2998	3.3642	4.1074	4.5748	4.7764	4.6866	4.1985		
2	8.4941	0.8100	2.3329	3.4333	4.2267	4.7638	5.0648	5.1270	4.9170	4.3234	
0	8.4920	0.8142	2.3520	3.4770	4.3063	4.8936	5.2644	5.4259	5.3679	5.0525	4.3648

Tafel VI.

	$\text{tg } 0\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 2\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 4\frac{1}{2}J$
$n=0$ 0, 0 0			
$n=1$ 1, -1 9.69897 1, +1 9.69897 0, 0 0.		0.	
$n=2$ 2, -2 9.57403 2, 0 9.87506 2, +2 9.57403 1, -1 0.17609 1, +1 0.17609 0, 0 0.35218		0.17609 0.17609	0.35218
$n=3$ 3, -3 9.49485 3, -1 9.97197 3, +1 9.97197 3, +3 9.49485			

Tafel VI. (Fortsetzung.)

	$\text{tg } \frac{0\frac{1}{2}J}{2}$	$\text{tg } \frac{2\frac{1}{2}J}{2}$	$\text{tg } \frac{4\frac{1}{2}J}{2}$	$\text{tg } \frac{6\frac{1}{2}J}{2}$	$\text{tg } \frac{8\frac{1}{2}J}{2}$	$\text{tg } \frac{10\frac{1}{2}J}{2}$
	$n=3$					
2, - 2	0.27300	0.27300				
2, 0	0.57403	0.57403				
2, + 2	0.27300	0.27300				
1, - 1	0.67094	0.87506	0.75012			
1, + 1	0.75012	0.87506	0.67094			
0, 0	0.79588	1.05115	1.05115	0.79588		
	$n=4$					
4, - 4	9.43686					
4, - 2	0.03892					
4, 0	0.21501					
	etc.					
3, - 3	0.33995	0.33995				
3, - 1	0.81707	0.81707				
3, + 1	0.81707	0.81707				
3, + 3	0.33995	0.33995				
2, - 2	0.88402	1.11810	0.99316			
2, 0	1.21501	1.41913	1.21501			
2, + 2	0.99316	1.11810	0.88402			
1, - 1	1.18505	1.51604	1.59522	1.33995		
1, + 1	1.33995	1.59522	1.51604	1.18505		
0, 0	1.28196	1.64098	1.77131	1.64098	1.28196	
	$n=5$					
5, - 5	9.39110					
5, - 3	0.09007					
5, - 1	0.39110					
	etc.					
4, - 4	0.39110	0.39110				
4, - 2	0.99316	0.99316				
4, 0	1.16925	1.16925				
4, + 2	0.99316	0.99316				
4, + 4	0.39110	0.39110				
3, - 3	1.04431	1.29419	1.16925			
3, - 1	1.53723	1.77131	1.56719			
3, + 1	1.56719	1.77131	1.53723			
3, + 3	1.16925	1.29419	1.04431			
2, - 2	1.47028	1.83826	1.94740	1.69213		
2, 0	1.83826	2.16925	2.16925	1.83826		
2, + 2	1.69213	1.94740	1.83826	1.47028		
1, - 1	1.71332	2.13929	2.34534	2.29419	1.93517	
1, + 1	1.93517	2.29419	2.34534	2.13929	1.71332	
0, 0	1.79250	2.23620	2.47028	2.47028	2.23620	1.79250
	$n=6$					
6, - 6	9.35331					
6, - 4	0.13146					
6, - 2	0.52940					
6, 0	0.65434					
	etc.					

Tafel VI. (Fortsetzung.)

	$\text{tg } 0\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 2\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 4\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 6\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 8\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 10\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 12\frac{1}{2}J$
	$n=6$						
5, — 5	0.43249	0.43249					
5, — 3	1.13146	1.13146					
5, — 1	1.43249	1.43249					
	etc.						
4, — 4	1.17285	1.43249	1.30755				
4, — 2	1.78467	2.03455	1.83043				
4, 0	1.97656	2.21064	1.97656				
4, + 2	1.83043	2.03455	1.78467				
4, + 4	1.30755	1.43249	1.17285				
3, — 3	1.69573	2.08570	2.21064	1.95537			
3, — 1	2.21064	2.57862	2.60858	2.27759			
3, + 1	2.27759	2.60858	2.57862	2.21064			
3, + 3	1.95537	2.21064	2.08570	1.69573			
2, — 2	2.04792	2.51167	2.75471	2.73352	2.37450		
2, 0	2.45368	2.87965	3.00652	2.87965	2.45368		
2, + 2	2.37450	2.73352	2.75471	2.51167	2.04792		
1, — 1	2.25204	2.75471	3.05574	3.13146	2.97656	2.53286	
1, + 1	2.53286	2.97656	3.13146	3.05574	2.75471	2.25204	
0, 0	2.31898	2.83389	3.15265	3.25640	3.15265	2.83389	2.31898

Tafel VII.

	$\text{tg } 0\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 2\frac{1}{2}J$
	$n=0$	
0, 0	0.	
	$n=1$	
1, — 1	9.69897	
1, + 1	9.69897	
	$n=2$	
2, — 2	9.57403	
2, 0	9.87506	
2, + 2	9.57403	
0, 0	9.87506	9.87506
	$n=3$	
3, — 3	9.49485	
3, — 1	9.97197	
3, + 1	9.97197	
3, + 3	9.49485	
1, — 1	9.97197	0.27300
1, + 1	0.27300	9.97197

Tafel VII. (Fortsetzung.)

	$\text{tg } 0\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 4\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 8\frac{1}{2}J$	$\text{tg } 12\frac{1}{2}J$
	$n=4$			
4, - 4	9.43686			
4, - 2	0.03892			
4, 0	0.21501 etc.			
2, - 2	0.03892	0.51604		
2, 0	0.51604	0.51604		
2, + 2	0.51604	0.03892		
0, 0	0.21501	0.81707	0.21501	
	$n=5$			
5, - 5	9.39110			
5, - 3	0.09007			
5, - 1	0.39110 etc.			
3, - 3	0.09007	0.69213		
3, - 1	0.69213	0.86822		
3, + 1	0.86822	0.69213		
3, + 3	0.69213	0.09007		
1, - 1	0.39110	1.16925	0.86822	
1, + 1	0.86822	1.16925	0.39110	
	$n=6$			
6, - 6	9.35331			
6, - 4	0.13146			
6, - 2	0.52940			
6, 0	0.65434 etc.			
4, - 4	0.13146	0.83043		
4, - 2	0.83043	1.13146		
4, 0	1.13146	1.13146		
4, + 2	1.13146	0.83043		
4, + 4	0.83043	0.13146		
2, - 2	0.52940	1.43249	1.30755	
2, 0	1.13146	1.60858	1.13146	
2, + 2	1.30755	1.43249	0.52940	
0, 0	0.65434	1.60858	1.60858	0.65434

Hansen, P. A.

Entwicklung der negativen u. ungraden Potenzen der Quadratwurzel der
Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos. U \cos. U' + \sin U \sin U' \cos. J.)$

Lpzg 1854

4 Math.p. 147 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053517-7